DM 6

On considère l'ensemble $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 2.

1. Montrer que E muni de l'addition de deux matrices et de la multiplication d'une matrice par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (vérifier les 10 propriétés caractéristiques).
2. On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base de E. Quelle est la dimension de E ?
3. On pose $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que la famille $\mathcal{C} = (C_1; C_2; C_3; C_4)$ est une base de E.
4. On note Q la matrice définie par $Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées de Q dans chacune des deux bases vues ci-dessus.
5. On considère à présent l'application f définie sur E par $f(M) = M -^t (M), \forall M \in E$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Donner une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) f est-elle injective, surjective, bijective ?