DS 8 (durée 3h00)

Le sujet comporte trois pages, un exercice et un problèmes. L'exercice et le problème sont complètement indépendants. Les documents sont interdits. La calculatrice est interdite. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Exercice ("Vous payez par carte bancaire ?")

Dans un magasin, l'étude du mode de paiement en caisse en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :
$P(S=0\cap U=0)=0.4$; $P(S=0\cap U=1)=0.3$;
$P(S=1\cap U=0)=0.2$; $P(S=1\cap U=1)=0.1$;
où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p=\frac{3}{5}$.
2. Calculer la covariance du couple (S,U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros, sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
4. On suppose que les modes de paiement sont indépendants entre les individus. Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n\geq 2$). On définit trois variables aléatoires C_n, L_1 et L_2 par :
   — C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
   — L_1 (resp. L_2) est égale au rang du premier (resp. du deuxième) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp. au moins deux) et à 0 sinon.

   (a) Déterminer la loi de C_n, et donner la valeur de son espérance et de sa variance.

   (b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier, par le calcul, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(L_1=k)=1$.

   (c) Déterminer la loi du couple (L_1,L_2)

   (d) En déduire la loi de L_2.

Problème (Critère d'optimisation de Kelly)

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n=1)$, pour chaque $n>1$. La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k, $k\in\mathbb{N}^*$

En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n^{ième}$ pari.

On a ainsi l'encadrement : $0 \leq M_{n+1} \leq C_n$ pour tout entier n.

On parle de ruine s'il existe un entier naturel n pour lequel $C_n = 0$

Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème : $\frac{1}{2} < p < 1$.

I. Quitte ou double

1. Rappeler la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer deux réels a et b vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = C_n + (aX_{n+1} + b)\, M_{n+1}$.
3. Établir une relation de récurrence simple entre $E(C_{n+1})$ et $E(C_n)$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E(C_n) = C_0 + (2p-1) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(M_k)$

   En déduire que pour maximiser $E(C_n)$ il faut miser tout son capital à chaque pari (stratégie du quitte ou double).
5. Calculer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N} (X_n = 1) \right)$

   Quelle interprétation concrète peut-on donner de ce résultat concernant la stratégie dite du "quitte ou double" ?

II. Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction constante du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1} = \alpha C_n$, avec $\alpha \in \,]0,1[$ (indépendant de n)

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n$.
2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
   Que représente la variable aléatoire S_n ? Déterminer la loi de S_n et son espérance.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C_n = (1+\alpha)^{S_n} (1-\alpha)^{n-S_n} C_0$.
4. Montrer que : $E\left[\dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{C_n}{C_0} \right) \right] = p \ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

III. Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x \in [0,1[\,,\ f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$

1. Étude de f.
   (a) Étudier les variations de f sur $]0,1[$ et montrer que f admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p.
   (b) Déterminer la limite de f en 1 et interpréter le résultat.
   (c) Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,1[$

2. Conclusion : le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme. Que donnerait l'expression de α_K dans les cas limites $p = \frac{1}{2}$ et $p = 1$?
Interpréter ces deux résultats.

IV Simulation informatique

1. En utilisant le module random et la fonction random() qui renvoie un nombre aléatoire entre 0 et 1, Ecrire une fonction *Bernoulli* qui prend en argument un réel $p \in]0,1[$ et qui simule le résultat d'une VAR suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
2. Ecrire un programme *Kelly*, en PYTHON, qui prend en argument la valeur du capital initial C_0, la probabilité de succès d'un pari p, le nombre de paris N que l'on souhaite effectué et qui renvoie le capital obtenu au bout de N pari, C_N.

V. Étude de la valeur critique α_c

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$.

On considèrera dans ce qui suit que α, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

1. On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.
   (a) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ On notera encore φ ce prolongement.
   (b) Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme
   $$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)\left[\ln(1-x)\right]^2}$$
   (c) Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.
   (d) Montrer que φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.
2. Etablir : $\forall p \in \left]\frac{1}{2},1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$
3. Cette partie est facultative et ne doit être traitée que si le reste du problème a été traité.
   (a) Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.
   On commencera par donner le développement limité en 1 à l'ordre 2 de la fonction ln.
   (b) Montrer que α_c, est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :
   $$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$
   (c) Établir l'équivalence, au voisinage de $\frac{1}{2}$:
   $$\alpha_c \sim 2\alpha_K$$

Conclusion : pour des valeurs de p proches de $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.

Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent $\alpha = \dfrac{\alpha_K}{2}$, la moitié de la valeur de Kelly.