Synthèse suites

Définition :

Une suite à valeur dans E est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble E. Si $a : \mathbb{N} \to E$ est une suite on la note souvent $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cela signifie que $a_n = a(n)$ pour tout entier naturel n. a_n s'appelle le terme de rang n de la suite (a_n). On note $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E. Si $E = \mathbb{R}$, la suite est à valeurs réelles, si $E = \mathbb{C}$ la suit est à valeurs complexes. Si une suite est à valeurs réelles ou complexes on dit que c'est une suite numérique.

Définition : On dit que la suite (a_n) est définie par son terme général s'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = f(n)$.

On dit que la suite (a_n) est définie par récurrence s'il existe une fonction f de E dans E et un élément $x \in E$ telle que

$$\begin{cases} a_0 = x \\ a_{n+1} = f(a_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On dit que la suite (a_n) est définie par récurrence d'ordre p s'il existe une fonction f de E^p dans E et un élément $(x_0; x_2; ...; x_{p-1}) \in E^p$ telle que

$$\begin{cases} a_0 = x_0; a_1 = x_1; ...; a_{p-1} = x_{p-1} \\ a_{n+p} = f(a_{n+p-1}, ..., a_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Définition : Soit r un nombre réel ou complexe. Une suite arithmétique de raison r est une suite récurrente (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{C} \\ a_{n+1} = a_n + r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Propriété : Soit (a_n) une suite arithmétique de raison r. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 + nr$

Définition : Soit $q \in \mathbb{C}$, une suite géométrique de raison q est une suite récurrente (a_n) définie par : $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{C} \\ a_{n+1} = qa_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Propriété : Soit (a_n) une suite géométrique de raison q. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 q^n$

Propriété :(Somme des premiers termes d'une suite géométrique) Soit q un nombre complexe alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \text{ si } q \neq 1 \\ n + 1, \text{ si } q = 1 \end{cases}$$

Définition : Soit m et p deux complexes avec $m \neq 1$. On appelle suite arithmético-géométrique une suite récurrente définie par : $\begin{cases} a_0 \in \mathbb{C} \\ a_{n+1} = ma_n + p, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Définition : Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite (u_n) vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

, où a et b sont deux réels et b est non nul.

Le polynôme caractéristique P de la suite (u_n) est défini par $P(x) = x^2 - ax - b$.

Propriété : Soient a et b sont deux réels, b non nul, (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $P(x) = x^2 - ax - b$. On note λ et μ les racines complexes de P.

1. Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda \neq \mu$, il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$
2. Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda = \mu$ Il existe deux réels α et β tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n)\lambda^n$
3. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on pose $\lambda = re^{i\theta}, (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Il existe deux réels α et β tels que $u_n = r^n(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))$

Soit (a_n) une suite réelle.

Définition : (a_n) est stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang, c'est à dire $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow a_n = a_{n+1}$.

(a_n) est périodique de période p s'il existe un entier p non nul telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+p} = a_n$.

Définition :

(a_n) est croissante (resp. strictement croissante) si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geq a_n$ (resp.$a_{n+1} > a_n$).

(a_n) est décroissante (resp. strictement décroissante) si $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n$ (resp.$a_{n+1} < a_n$).

(a_n) est (strictement) monotone si (a_n) est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

(a_n) est bornée si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \mid a_n \mid \leq K$.

(a_n) est majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{N}$) tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq M$ (resp. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq M$).

Définition : (a_n) est convergente lorsqu'il existe l un nombre réel ou complexe tel que : $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \mid a_n - l \mid \leq \varepsilon$

On dit que (a_n) admet l pour limite ou encore que (a_n) tend vers l et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$.

La suite est divergente sinon.

(a_n) admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite si $\forall M > 0, \exists p \in \mathbb{N} n \geq p \Rightarrow a_n \geq M$ (resp. $\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N} n \geq p \Rightarrow a_n \leq M$). On note $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$).

Propriété : Si une suite (a_n) admet une limite finie ou infinie, cette limite est unique.

Propriété : Soit (a_n) une suite numérique, l un réel ou un complexe et (b_n) une suite réelle. On suppose que (b_n) tend vers 0 et qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq p$, $\mid a_n - l \mid \leq b_n$. Alors (a_n) tend vers l.

Propriété : Soit (a_n) une suite numérique. Les suites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) converge vers un même nombre l si et seulement si la suite (a_n) converge vers l.

Propriété : Une suite convergente est bornée.

Propriété : Soit (a_n) et (b_n) deux suite numériques telles que (b_n) est bornée et (a_n) tend vers 0. Alors $(a_n b_n)$ tend vers 0.

Propriété : Soit (a_n) une suite numérique. Si (a_n) tend vers une limite l non nul alors a_n est non nul à partir d'un certain rang. De plus si l est strictement positive (resp. négative) alors a_n est strictement positive (resp. négative) à partir d'un certain rang.

Propriété : Soit λ un nombre réel ou complexe, (a_n) et (b_n) deux suites numériques de limite respective l et l'.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda a_n = \lambda l$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = l + l'$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n b_n = ll'$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{l'}$, si $l' \neq 0$

Propriété :

1. La somme d'une suite minorée et d'une suite tendant vers $+\infty$ est une suite tendant vers $+\infty$. La somme d'une suite majorée et d'une suite tendant vers $-\infty$ est une suite tendant vers $-\infty$.
2. Le produit d'une suite tendant vers un réel fini non nul ou vers l'infini et d'une suite tendant vers l'infini est une suite tendant vers l'infini (le signe est donné par la règle des signes).
3. L'inverse d'une suite tendant vers 0 tend vers l'infini, l'inverse d'une suite tendant vers l'infini tend vers 0.

Propriété : Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On suppose qu'à partir d'un certain rang $a_n \leq b_n$ alors :

1. Si les deux suites sont convergentes, $\lim a_n \leq \lim b_n$.
2. Si (a_n) tend vers $+\infty$ alors (b_n) également.
3. Si (b_n) tend vers $-\infty$ alors (a_n) également.

Propriété : Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles. On suppose qu'à partir d'un certain rang $a_n \leq b_n \leq c_n$ et que $\lim a_n = \lim c_n = l$. Alors (b_n) est convergente et $\lim b_n = l$.

Propriété :(théorème des suites monotones - admis) : Soit (a_n) une suite réelle, croissante . Si (a_n) n'est pas majorée alors elle admet $+\infty$ pour limite. Si elle est majorée alors (a_n) est convergente et $\lim a_n = sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Soit (a_n) une suite réelle, décroissante . Si (a_n) n'est pas minorée alors elle admet $-\infty$ pour limite. Si elle est minorée alors (a_n) est convergente et $\lim a_n = inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

Propriété :(cas des suites géométriques) Soit q un nombre réel positif. La suite (q^n) tend vers 0 si $\mid q \mid < 1$, tend vers 1 si q=1 et tend vers $+\infty$ sinon.

Définition : Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :

1. L'une est croissante, l'autre est décroissante.
2. $\lim_{n \to +\infty} (b_n - a_n) = 0$

Propriété : Soient (a_n) et (b_n) deux suites adjacentes. Les deux suites sont alors convergentes et elles ont la même limite.

Propriété : : Soit $\alpha > 0$ et $q > 1$.
$\lim_{+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ et $\lim_{+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$

Définition : : On dit que (a_n) et (b_n) sont deux suites équivalentes si
$\exists (\alpha_n)$ telle que $a_n = \alpha_n b_n$ et $\lim_{+\infty} \alpha_n = 1$. On note alors $a_n \sim b_n$.

Propriété : On suppose (b_n) non nulle à partir d'un certain rang. Alors $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim_{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Propriété :

1. $a_n \sim a_n$.
2. $a_n \sim b_n \Rightarrow b_n \sim a_n$.
3. $(a_n \sim b_n) et (b_n \sim c_n) \Rightarrow a_n \sim c_n$.

Propriété : Si $a_n \sim b_n$ et si (a_n) a pour limite un réel ou $\pm\infty$ alors (b_n) a la même limite.

Propriété : Si $a_n \sim b_n$ et si a_n est non nulle à partir d'un certain rang alors b_n est non nulle à partir d'un certain rang.

Si, de plus, (a_n) et (b_n) sont deux suites réelles alors elles sont du même signe à partir d'un certain rang.

Propriété : Soit (a_n) une suite non nul à partir d'un certain rang et qui converge vers 0. Alors

1. $\ln(1 + a_n) \sim a_n$
2. $\exp(a_n) - 1 \sim a_n$
3. $\sin(a_n) \sim a_n$
4. $\tan(a_n) \sim a_n$
5. $\arcsin(a_n) \sim a_n$

Propriété : Si $a_n \sim b_n$ et si (a_n) converge vers un réel différent de 1 alors $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$.

Propriété :

1. $a_n \sim b_n \Rightarrow a_n c_n \sim b_n c_n$.
2. $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n \Rightarrow a_n c_n \sim b_n d_n$.
3. Si $a_n \sim b_n$ et si (a_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{b_n}$.
4. Si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$ et si (c_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}$.
5. $a_n \sim b_n \Rightarrow a_n^p \sim b_n^p$ pour $p \in \mathbb{N}$ ou $p \in \mathbb{Z}$ et a_n non nul à partir d'un certain rang.