Exercices : Suites

Exercice 1 : Détermination du terme général d'une suite
Déterminer le terme général des suites définies par :

1. $u_0 = 2, u_{n+1} = u_n + 5, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $u_0 = 3, u_{n+1} = -3u_n, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $u_0 = 1, u_{n+1} = 3u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser une suite auxiliaire)
4. $u_0 = 2, u_{n+1} = u_n + 4^n - 5n, \forall n \in \mathbb{N}$
5. $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + (6\alpha + 9)u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$)
6. $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 : Changement de suite
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+4}{u_n+1}$.

1. Montrer que l'équation $\frac{x+4}{x+1} = x$ admet deux solutions réelles l_1 et l_2 telles que $l_1 < l_2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
   On définit alors la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n - l_2}{u_n - l_1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et qu'elle est géométrique.
4. Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
5. Déterminer la limite de (u_n).
6. Écrire un programme en Python qui reçoit en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de (u_n). Vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 3 : limite de suite
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n - \sqrt{n}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^3 + 3n}{2^n}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n+2}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^6 - ln(n)}{e^n - (-1)^n}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3n+2}{3n-4}\right)^{6n}$
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2^k}}$
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$

Exercice 4 : Suite implicite
On définit l'équation $(E_n) : nx + \ln(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on notera x_n cette solution.

2. Montrer que $x_n \in]0;1[$
3. Déterminer le sens de variation de (x_n).
4. Conclure sur la convergence de (x_n) et sa limite.

Exercice 5 : Étude de suites récurrentes

1. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$, après avoir émis des conjectures à l'aide de la calculatrice.
2. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$, après avoir émis des conjectures à l'aide de Python.

Exercice 6 : Encadrement d'une somme partielle

1. Montrer que : $\forall k \geq 2, \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
2. On pose $v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}, \forall n \geq 2$
   (a) Déterminer le sens de variation de $(v_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\geq 2}$ converge.

Exercice 7 : Série alternée

On définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge. (on pourra étudier les suites extraites des termes d'ordre pair et impair)
2. Calculer, pour $k \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1} dt$.
3. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 8 : Suites couplées

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > 0, v_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{u_n+v_n}, v_{n+1} = \frac{{v_n}^2}{u_n+v_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies et strictement positives.
2. Montrer que ces deux suites convergent.
3. Déterminer leurs limites. (on pourra étudier $u_{n+1} - v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$).
4. Déterminer le terme général de (u_n) et (v_n) en fonction de n, u_0 et v_0. (on pourra étudier $\frac{u_n}{v_n}, \forall n \in \mathbb{N}$).

Exercice 9 : Vitesse de convergence
On définit (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}(u_n - \sqrt{2})$

2. En déduire que $\mid u_{n+1}-\sqrt{2}\mid \leq \mid 1-\sqrt{2}\mid \times \mid u_n-\sqrt{2}\mid$
3. En déduire que (u_n) converge et sa limite.

Exercice 10 : Équivalents

1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ pour les suites définies par :
   (a) $u_n = e^n - 3^n + \ln(n)$
   (b) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
   (c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
   (d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ est équivalente à $(n!)$.
3. On étudie la suite (S_n) de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\forall t \in]-1;+\infty[, \ln(1+t) \leq t$.
   (b) En déduire que $\forall t \in]-1;+\infty[, \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n)+1$.
   (d) Déterminer un équivalent de S_n
   (e) On définit (u_n) par $u_n = S_n - \ln(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (u_n) converge (sa limite s'appelle la constante d'Euler, notée γ).