

DM 1

Soit t un réel strictement positif. On définit la suite (x_n) par $x_0 = t$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g : x \mapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de g .
 (b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que (x_n) converge et déterminer sa limite.
 (c) Étudier la suite (x_n) quand $t < 1$.
2. On considère également deux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n(x_n - 1), \text{ et } v_n = 2^n(1 - \frac{1}{x_n}) = \frac{u_n}{x_n}$$

- (a) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1} . En déduire le sens de variation de (u_n) .
- (b) Déterminer de même le sens de variation de (v_n)
- (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.
- (d) Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.
- (e) Déduire de la question (1), que (u_n) et (v_n) ont la même limite qu'on notera L .
- (f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n . En déduire que pour tout t strictement positif, on a $1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1$.

3. L est un nombre réel dépendant de t . Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, nous poserons $x_n(t) = x_n, u_n(t) = u_n, v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t .

- (a) Déterminer $f(1)$.
- (b) Calculer $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t - 1}$.
 En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.
- (c) i. Montrer que $\forall t_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 t_2) = x_n(t_1) x_n(t_2)$
 ii. En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n(t_1 t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2))$
 iii. Donner une relation entre $f(t_1 t_2), f(t_1), f(t_2)$.
- (d) i. Montrer que pour tout réel t strictement positif et tout réel h tel que $t + h$ est positif, on a :

$$f(t + h) - f(t) = f(1 + \frac{h}{t})$$

- ii. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer l'expression de $f'(t)$ pour $t > 0$.
- iii. En justifiant votre réponse, exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles.
- (e) Exprimer, pour tout entier naturel n , x_n en fonction de n et de t . Retrouver alors directement le résultat précédent.