Exercices : Fonctions

Exercice 1 : Équations

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminé leur ensemble de définition :

1. $\ln(x+2)+\ln(x-1)=\ln(2x^2)$
2. $e^{5x}-3e^{3x}-6e^x=0$
3. $(x-1)(x+2)\leq(x-1)(x^2+2x-4)$
4. $ax^2+(2-a)x+(3+a)=0$ où a est un paramètre réel.
5. $\tan(4x)\tan(x)=1$
6. $\sin(2x)+\cos(x)=0$
7. $\cos(2x)-\cos(x)+1\leq 0$
8. $\arctan(2x)-\arctan(x)=\frac{\pi}{4}$

Exercice 2 : Calculs de limites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(e^x-x)}{x^2+1}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(x)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{\frac{1}{x^2}}-x$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})^x$

Exercice 3 : Équivalents

Déterminer les équivalents suivants :

1. $x\ln(1+x^2)-2x\ln(x)$ en $+\infty$
2. $\frac{\sin(2x)}{\cos(x^2)-1}$ en 0
3. $\sqrt{4x^2-5x}-2x$ en $+\infty$
4. $\frac{e^x-e}{x-1}$ en 1.

Exercice 4 : Suite implicite

Montrer que pour chaque $n\geq 1$ l?équation $x^n+x^2+2x=1$ admet une unique solution positive que l'on notera u_n, puis étudier la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 5 : Études de fonctions

On pose $sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\forall x\in\mathbb{R}$.

1. Étudier la parité de sh
2. Étudier le sens de variation de sh et ses limites
3. Montrer que sh est bijective et déterminer l'expression de sa réciproque.
4. Déterminer le tableau de variation de sh^{-1} par deux méthodes différentes.

On pose $f(x)=\ln(\frac{x+1}{x-4}),\forall x\in D$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Déterminer le tableau de variation de f sur D.
3. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.
4. Déterminer le tableau de variation de f^{-1} de deux façons différentes.

Exercice 6 : Fonctions trigonométriques réciproques

1. Calculer les nombres suivants : $\arcsin(-\frac{1}{2})$, $\arctan(\tan -\frac{7\pi}{5})$.
2. Montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
3. On définit f par $f(x) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x}{\sqrt{(x-1)^2+1}})$
   (a) déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Calculer f'
   (c) En déduire une expression plus simple de f.

Exercice 7 : Inégalités classiques

Démontrer les inégalités ou encadrements suivants :

1. $\forall x \in]-1;+\infty[, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \leq \arctan(x) \leq x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq x$

Exercice 8 : Développements limités
Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\ln(\sqrt{1+x}) - e^{2+x}$
2. $DL_4(0)$ de $\frac{\cos(x)}{2+x}$
3. $DL_3(0)$ de $\ln(3e^x + e^{-x})$
4. $DL_3(1)$ de $x^{\frac{1}{1-x}}$
5. $DL_4(0)$ de $e^{\cos(x)}$
6. $DL_2(0)$ de $\ln(1 + x + \sqrt{4+x})$
7. $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(2+x)}{(1+x)^3}$
8. $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $\sin(x)$

Exercice 9 : théorèmes de Rolle
Soit $a > 0$ et f une fonction réelle, continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$ et qui vérifie $f(0) = 0$, $f(a) > 0$ et $f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0;a[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 10 : théorèmes des accroissements finis

1. (a) Soit $\alpha \in]0;1[$. Montrer que $\forall n \geq 1, \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{n^\alpha}$.
   (b) En déduire un équivalent de la suite (H_n) définie par : $\forall n \geq 1, H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + 1 - \ln(x)$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?

(b) Montrer que $\forall x \in [2;3], \mid f(x) - e \mid \leq \frac{2}{3}|x - e \mid$.

(c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

(d) Écrire une fonction en Python permettant d'obtenir une valeur approchée de e avec une erreur précisée en argument de la fonction.

Exercice 11 : Primitive

Déterminer une primitives des fonctions suivantes :

1. $\cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $\frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$ sur $\mathbb{R}$
4. $\frac{1}{x^5}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
5. $x^2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. $(x^2+2)\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
7. $\frac{x+3}{x^2+x-2}$ sur $]1;+\infty$
8. $\cos(\ln(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (en posant $t = \ln(x)$)
9. $t^2\sqrt{1-t^2}$ sur $[0,1]$ (en posant $t = \sin(u)$)

Exercice 12 : Suites définies par une intégrale

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel u_n vérifiant la relation $\displaystyle\int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}}dt = 1$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.

   (c) Montrer que pour tout réel positif t, on a : $\sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{1}{2}t$.

   (d) En déduire que pour tout entier $n \geq 1, e^{-\sqrt{n}-\frac{u_n-n}{2\sqrt{n}}} \leq e^{-\sqrt{u_n}}$

   (e) En déduire un équivalent de $u_n - n$ en $+\infty$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{5+4\cos(t)}dt$

   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq 2\pi$. Calculer $I_1 + \frac{5}{4}I_0$.

   (b) Déterminer une constante a telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + I_n = aI_{n+1}$.

   (c) Donner la valeur de I_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de I_0. Calculer alors I_n en fonction de n (penser à passer aux limites).

Exercice 13 : Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}dt$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et donner $f'(x)$.
4. A l'aide du théorème des gendarmes, déterminer la limite de f en $+\infty$.