Exercices : Séries

Exercice 1 : Nature et somme de séries
Dans chaque cas déterminer si la série est convergente et calculer sa somme lorsque c'est possible.

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$
2. $\sum_{n\geq 1} (1-\frac{1}{n})^n$
3. $\sum_{n\geq 1} e^{-n}$
4. $\sum_{n\geq 0} ne^{-2n}$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$
6. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!}$
7. $\sum_{n\geq 0} n2^n$
8. $\sum_{n\geq 0} \frac{3n+1}{4^n n!}$
9. $\sum_{n\geq 0} \ln(\frac{n^2}{n^2-1})$

Exercice 2 : Natures de séries Dans chaque cas, préciser la nature de la série.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{4^n}$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+3}$
4. $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n^2}$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2+n^2\sin n}$

Exercice 3 : Série télescopique

1. Soit $n \geq 0$, simplifier $\arctan(n+1) - \arctan(n)$.

2. En déduire la nature et la somme en cas de convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$$

Exercice 4 : Équivalent d'une somme partielle

On considère la suite de sommes partielles suivante :

$$\forall n \geq 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

1. Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$\forall t > 1, \quad f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$$

2. En déduire que :

$$\forall k \geq 2, \quad \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$$

3. Donner un encadrement de S_n pour $n \geq 2$.
4. En déduire un équivalent de S_n ainsi que la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Exercice 5 : Une série convergente qui ne converge pas absolument
Soit $\alpha \geq 1$. On introduit :

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha}$$

1. On pose, pour tout $n \geq 0$, $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.
   Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$
3. Cette série est-elle absolument convergente ?
4. On cherche à calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$.
   (a) Pour tout $k \geq 0$, calculer $\int_0^1 t^{k+\alpha-1}dt$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$,

$$S_n = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1} - (-1)^{n+1}t^{n+\alpha}}{1+t}dt$$

   (c) Conclure que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} = \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt$$

Exercice 6 : Manipulations sur les séries

1. Soit S la somme de la série convergente $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Étudier la nature des séries suivantes et, en cas de convergence, exprimer leurs sommes en fonction de S :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Étudier la nature et la somme en cas de convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exercice 7 : Série dont le terme général est une suite définie par récurrence

On considère la suite u définie par

$$u_0 \in]0;1[\quad et \quad \forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

1. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
2. Prouver que la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
3. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
4. Démontrer que :

$$\forall x \in [0;u_0], \quad -\frac{\ln(1-u_0)}{u_0} x \geq -\ln(1-x)$$

5. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 8 : Calcul d'une somme

On souhaite calculer la valeur de la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. On définit :

$$\forall t \in [0;\pi], f(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t \quad et \quad \forall t \in]0;\pi], \quad g(t) = \frac{f(t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$$

1. Montrer que g se prolonge par continuité sur $[0;\pi]$ et que ce prolongement est de classe C^1 sur $[0;\pi]$.
2. Pour $k \geq 1$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^\pi f(t)\cos(kt)dt$$

3. Soient $t \in]0;\pi[$ et $n \geq 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2}$$

4. Soit Ψ une fonction de classe C^1 sur $[0;\pi]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \Psi(t)\sin((n+\tfrac{1}{2})t)dt = 0$$

5. Grâce aux questions précédentes, conclure que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$