Probabilités

Définition :L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles de cette expérience.

Définition : Un univers Ω est fini s'il est en bijection avec un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$.
Un univers est dénombrable s'il est en bijection avec un sous ensemble de $\mathbb{N}$.

Définition : Soit Ω un univers et $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble de parties de Ω. On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω si :
— $\Omega \in \mathcal{T}$
— $\mathcal{T}$ est stable pas passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{T}, \overline{A} \in \mathcal{T}$.
— $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable : Si (A_n) est une suite de $\mathcal{T}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Définition : Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $P : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ qui vérifie :
— $\forall A \in \mathcal{T}, \quad P(A) \geq 0$.
— $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$.
— Pour toute suite (A_n) d'événements de $\mathcal{T}$ deux à deux incompatibles $P(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$
Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est alors appelé espace probabilisé.

Définition : Si Ω est fini alors $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé fini. Si Ω est dénombrable alors $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est un espace probabilisé dénombrable.

Propriété :
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{T}^2$ deux événements.

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de Ω. Cette famille est un système complet d'événements si :
— $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
— $\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i = \Omega$.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de Ω. Cette famille est un système quasi-complet d'événements si :
— $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$.
— $P(\bigcup\limits_{i=0}^{+\infty} A_i) = 1$.

Propriété : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé discret avec $\Omega = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$.

P est entièrement déterminée par la donnée des probabilité des événements élémentaires $p_i = P(\omega_i), i \in \mathbb{N}$.

On a alors $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(A) = \displaystyle\sum_{i, w_i \in A} p_i$.

Propriété : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable où Ω est un ensemble fini de cardinal n. Il existe une unique probabilité P prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires. Pour tout élément ω de Ω, on a $P(\omega) = \frac{1}{n}$ et pour tout événement A, $P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{n}$. Cette probabilité est appelé probabilité uniforme sur Ω.

Propriété :(formule des probabilités totales)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Pour tout événement B on a alors : $P(B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)$.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{T}$ un événement qui vérifie $P(B) \neq 0$. Alors

$$P_B : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$$
$$A \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, appelée probabilité conditionnelle, conditionnée par B ou probabilité sachant B.

Propriété : Soit $(A, B) \in \mathcal{T}^2$. On a $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ si $P(A) \neq 0$.

Propriété :(formule des probabilités composées)

Pour toute famille finie $(A_1, A_2, ..., A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé fini tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3)....P_{A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}}(A_n)$.

Propriété :(formule des probabilités totales)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Pour tout événement B on a alors : $P(B) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(B)P_B(A_n)$.

Propriété :(formule de Bayes) Si A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors :

$$P(A/B) = \frac{P(A)P(B/A}{P(B)}$$

.

Définition : Soient A et B deux événement d'un même espace probabilisé. On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Propriété : Soient A et B deux événements d'un même espace probabilisé. On suppose que $P(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B)P(B)$.

Définition : Soit $(A_1, A_2, ..., A_n)$ une famille d'événements d'un même espace probabilisé. Ces événements sont mutuellement indépendants si pour tout $I \subset [|1;n|], P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Définition : Soit (A_n) une suite d'événements de $\mathcal{T}$. Les événements (A_n) sont mutuellement indépendants ssi toute sous famille finie est une famille d'événements mutuellement indépendants.