

Exercices : Probabilités

Exercice 1 : Calculs rapides de probabilité

1. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 3$. On tire les boules une à une sans remise. Quelle est la probabilité que les boules numérotées 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre ?
2. Dans un jardin, il y a 8 tulipes et 12 narcisses. On a remarqué que les tulipes sont toutes sorties avant que les narcisses ne sortent. Si l'ordre de pousse de ces bulbes était totalement aléatoire, quelle est la probabilité d'un tel événement ?
3. La classe de BCPST 2 compte 43 élèves, quelle est la probabilité que deux élèves au moins soient nés le même jour ? On supposera que toutes les années comportent 365 jours.
4. Une urne contient 24 boules : 8 blanches, 8 rouges et 8 noires, numérotées pour chaque couleur de 1 à 8. On tire simultanément 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité qu'elles aient des numéros consécutifs ?
5. On veut ranger quinze boules dans trois casiers. On choisit aléatoirement et de façon équiprobable un rangement possible. Décrire l'univers de l'expérience aléatoire. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient dans le même casier ? Qu'un exactement casier soit vide ? Que chaque casier contienne 5 boules ?
6. On lance n fois de suite un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir le même numéro à tous les lancers ?
7. Un logiciel informatique permet de tirer un nombre entier naturel de manière aléatoire. Pour $i \in \mathbb{N}$, la probabilité que l'ordinateur renvoie le nombre i est $1/2^{i+1}$. Vérifier qu'on a bien défini une probabilité. On lance une fois ce programme, calculer la probabilité d'obtenir un nombre impair.
8. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire une à une n boules dans l'urne. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches
 - (a) dans le cas d'un tirage sans remise ?
 - (b) dans le cas d'un tirage avec remise ?
9. Un logiciel informatique permet de tirer un nombre entier naturel de manière aléatoire. Pour $k \in \mathbb{N}$, la probabilité que l'ordinateur renvoie le nombre k est $1/(k!e)$. Vérifier que cette probabilité est bien définie. Après avoir tiré un nombre aléatoire k avec ce programme, on tire une boule dans une urne composée de k boules blanches et une boule noire. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule noire ?
10. On dispose de deux dés à six faces : le premier est équilibré tandis que le deuxième est truqué et donne le nombre 1 avec une probabilité de $1/5$. On choisit un dé au hasard et on effectue n lancers avec. On observe que le nombre 1 n'apparaît jamais au cours de ces n lancers. À partir de quelle valeur de n peut-on affirmer avec une confiance de 90% que l'on a pioché le dé équilibré ?

Exercice 2 : Probabilités sur des univers dénombrables

1. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Soit P l'application définie sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(\{n\}) = \mu 4^{-n}$$

- (a) Déterminer μ pour que P soit une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
 (b) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit P l'application définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{n\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

- (a) Montrer qu'il s'agit d'une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
 (b) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.
3. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que la suite $(P(\{n\}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 3 : Rat de laboratoire

Dans une expérience, on place un rat dans un couloir avec deux branches. La branche A mène vers une impasse. La branche B mène vers une croquette de nourriture.

On répète n fois cette expérience. La première fois, le choix de la branche est fait au hasard par le rat. Puis on observe le phénomène suivant : pour k un entier naturel non nul, si le rat a choisi la branche A à l'étape k alors il choisit la branche A avec une probabilité égale à $1/2$ à l'étape $k+1$. Si le rat a choisi la branche B à l'étape k alors il choisit la branche B avec une probabilité égale à $3/4$ à l'étape $k+1$.

On note r_n la probabilité de l'événement R_n = "le rat a choisi la branche B à la n -ème expérience".

- Déterminer une relation de récurrence entre r_n et r_{n+1} pour tout n entier naturel.
- En déduire la valeur de r_n pour tout entier naturel n .
- Déterminer la limite de r_n en $+\infty$.

Exercice 4 : Téléphone arabe

On considère une suite de relais qui transmettent un message binaire (0 ou 1). Chaque relais est noté R_n , $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité pour que le relais R_n transmette correctement le message au suivant vaut $q \in]0,1[$, et la probabilité qu'il le transforme en son opposé est $1 - q$. On note p_n la probabilité pour que le message arrivé au relais R_n soit identique au message arrivé en R_1 .

- Établir, pour $n \geq 1$, une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
- En déduire la valeur de p_n .
- Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interprétation?

Exercice 5 : Lancers d'une pièce déséquilibrée

On lance indéfiniment une pièce non équilibrée, la probabilité de tomber sur pile étant $2/3$. Pour $n \geq 1$, on introduit l'événement A_n : « après le n -ième lancer, on a obtenu pour la première fois deux pile consécutifs » et a_n la probabilité de l'événement A_n .

On introduit également les événements F_n : « on obtient face au n -ième lancer » et P_n : « on obtient pile au n -ième lancer ».

1. Calculer a_1 , a_2 et a_3 .
2. Vérifier que $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ est un système complet d'événements et en déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{9}a_n$$

3. En déduire une expression de a_n en fonction de n .

4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 6 : Lancer de pièce et tirages dans une urne

On lance une seule fois une pièce équilibrée.

Puis on effectue des tirages successifs dans une urne, contenant initialement une boule blanche et une boule noire, de la façon suivante :

- On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ;
- On rajoute ensuite une boule blanche si on a obtenu pile et une boule noire si on a obtenu face.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k -ième tirage.
2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k -ième tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu pile.
3. Calculer la probabilité d'avoir obtenu k boules blanches lors des k premiers tirages.

Exercice 7 : Descendance d'une fleur

Au temps $n = 0$, on dispose d'une fleur $\mathcal{F}_0$. À l'instant $n = 1$, elle peut avoir deux descendances avec probabilité $p \in]0,1[$ ou aucune avec probabilité $1 - p$ avant de mourir. Ces descendances éventuelles, à l'instant $n = 2$, peuvent avoir chacune des descendances de façon mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur $\mathcal{F}_0$ avant de mourir. Et ainsi de suite.

Pour $n \geq 0$, on notera U_n l'événement « la lignée de la fleur $\mathcal{F}_0$ est éteinte à l'instant n » et on définit $u_n = P(U_n)$.

1. Calculer u_0 et u_1 .
2. En étudiant la monotonie de la suite u , montrer qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ .
3. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = pu_n^2 + 1 - p$.
4. En déduire alors que $\ell = \min(1, \frac{1-p}{p})$ et interpréter ce résultat.