

Exercices : Dénombrement

Exercice 1 :

On prélève successivement et avec remise 4 jetons dans une urne contenant 10 jetons numérotés de 1 à 10. Combien y a-t-il de résultats :

1. Au total?
2. comportant 4 numéros impairs?
3. comportant exactement une fois le numéro 10?
4. comportant au moins un numéro pair?

Exercice 2 :

Une urne contient 5 boules noires numérotées de 1 à 5, quatre boules rouges numérotées de 1 à 4 et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise trois boules dans l'urne. Combien y a-t-il de résultats :

1. Au total?
2. comportant trois boules rouges?
3. Comportant deux boules noires et une boule blanche?
4. Comportant trois boules de couleurs différentes?

Exercice 3 : Un jeu de tarot contient 21 atouts allant du 1 au 21. On tire 5 cartes simultanément parmi les 21 atouts. Combien y a-t-il de résultats :

1. au total?
2. comportant une suite?
3. comportant au moins un atout pair?
4. comportant le 1 ou le 21?

Exercice 4 :

1. Combien de façons y a-t-il de choisir l'ordre de passage de 10 étudiants à un oral?
2. Combien y a-t-il d'anagramme du mot "abracadabra"? Écrire un programme en Python qui écrit un tel anagramme. Combien de ces anagrammes ont deux "B" côte à côte?
3. On souhaite payer la somme de 4 euros à un parc-mètre avec 2 pièces de un euro et 4 pièces de 0.5 euros. Combien y a-t-il de façons de le faire?
4. A un buffet, Alice a commandé 2 portions de sushi au thon, 4 portions de maki saumon, une salade au chou, 3 portions de brochettes au champignon. Combien de façons possibles a-t-elle d'organiser son repas?

Exercice 5 :

Un générateur de mots de passe propose des mots de passe de 8 caractères construits au hasard avec deux lettres majuscules, un chiffre et 5 lettres minuscules.

1. Combien y a-t-il de mots de passe possibles en tout ?
2. Combien commencent par le chiffre ?
3. Écrire un programme en Python qui génère un tel mot de passe.

Exercice 6 :

1. Combien y a-t-il de façons d'aligner 12 boules noires et 3 boules blanches ?
2. Combien y a-t-il de façons de distribuer 12 bonbons identiques entre 3 enfants, chaque enfant pouvant recevoir entre 0 et 12 bonbons.
3. Combien y a-t-il de 5-uplets $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{N}^5$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 45$?
Même question dans le cas où les entiers sont tous non nuls.

Exercice 7 :

On considère un ensemble E à n éléments, a un élément de E fixé et A une partie de E qui contient k éléments ($k \in \llbracket 1; n \rrbracket$).

1. Combien y a-t-il de parties A possibles au total ?
2. Combien y a-t-il de parties A qui contiennent a ? Combien y a-t-il de parties A qui ne contiennent pas a ?
3. Démontrer la formule du triangle de Pascal de deux manières différentes.

Exercice 8 : Manipulation de coefficients binomiaux

1. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
2. Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
3. Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$
4. Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par récurrence que : $\forall n \geq p, \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$