VAR discrètes

I. Variable aléatoire sur un espace probabilisé

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

Pour tout réel a de $\mathbb{R}$, $X^{-1}(]+\inf; a]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{T}$.

Avec la convention habituelle, cela signifie que $[X \leq a] \in \mathcal{T}$.

L'ensemble $X(\Omega)$ est l'ensemble image où l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque :

Comme en première année $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute applications de Ω dans $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle.

Propriété : Si X est une VAR sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors $[X \in I]$ est un événement.

Démonstration :(admise)

Définition : Si X est une VAR définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, le support de X noté $Supp(X)$ tout sous ensemble de $X(\Omega)$ tel que $P(X \in Supp(X)) = 1$.

Remarque :$X(\Omega)$ est un support de X mais ce n'est pas toujours le seul. Le support désigne toutes les valeurs que X peut prendre avec une probabilité non nulle.

Définition : Soit X une VAR sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction F_X de $\mathbb{R}$ dans $[0; 1]$ définie par $F_X(t) = P(X \leq t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Propriété : Soit F_x la fonction de répartition d'une VAR X sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Alors :

1. $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1$
2. F_X est croissante
3. F_X est continue à droite en tout point $t \in \mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.

Démonstration :de 1 et 2 (3 et 4 admis).

Exemple :Cas d'une VAR finies.

Définition :

1. Deux VAR X et Y sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ sont indépendantes si : Pour tout intervalle I et J de $\mathbb{R}$,
$$P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$$
2. Une famille de var $(X_1, ..., X_n)$ sont indépendantes si pour tout famille d'intervalles $I_1, ...I_n)$ dans $\mathbb{R}$, on a :
$$P(X_1 \in I_1, ..., X_n \in I_n) = P(X_1 \in I_1)...P(X_n \in I_n)$$

3. Une suite de VAR $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante si toute sous famille est constituée de VAR indépendantes.

Remarque :Attention à ne pas confondre expériences indépendantes, événements indépendants et variables indépendantes.

Propriété : Toute sous famille d'une famille de VAR indépendantes est une famille de VAR indépendantes.

Propriété : Si $X_1, ..., X_n, X_{n+1}, ..., X_{n+p}$ sont indépendantes, et si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ alors $u(X_1, ..., X_n)$ et $v_(X_{n+1}, ..., X_{n+p})$ sont indépendantes

Propriété : Si $X_1, ...X_n$ sont n VAR indépendantes et si $u_1, ...u_n$ sont n fonctions continues telles que u_i est définie sur $X_i(\Omega)$ pour tout $i \in [|1; n|]$. Alors $u_1(X_1)...., u_n(X_n)$ sont des VAR indépendantes.

II. VAR discrètes

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Une VAR $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite discrète si il existe une bijection entre $X(\Omega)$ et une partie de $\mathbb{N}$. Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini on dit que X est une VAR discrète finie.

Exemple :

Remarque :Si x et Y sont deux VAR discrètes, alors $X + Y, XY, \lambda X$ le sont également.

Propriété : Soit X un VAR discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On peut alors noter $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où $I \subset \mathbb{N}$. Alors la famille $(X = x_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements.

Démonstration :

Définition : Soit X une VAR discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. L'application

$$X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto P(X = x)$$

est appelée loi de probabilité de X.

Exemple :

Remarque :

— Donner la loi de probabilité d'une VAR discrète c'est donc donner la valeur de $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
— Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, alors $(X = x_i)_{i\in I}$ est un SCE donc $\sum_{i\in I} P(X = x_i) = 1$.
— Deux VAR définies sur le même $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ peuvent avoir la même loi sans être égales.

Propriété : Soit X une VAR finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Alors F_X est une fonction en escalier croissante et :

1. $F_X(x) = 0$ si $x < x_1$.
2. Pour $\forall k \in [|1; n-1|], \forall x_k \in [x_k; x_{k+1}[$, on a $F_X(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} P([X = x_i])$
3. $F_X(x) = 1$ si $x \leq x_n$

Démonstration :

Exemple :

Propriété : Si $X(\Omega) = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < ... < x_n$ alors $\forall i \in [|2; n|], P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$.

Démonstration :

Exemple :

III. Espérance, variance

Définition : Soit X une VAR discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

— Si X est finie, on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Alors l'espérance de X est le réel $E(X)$ défini par $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$

— Sinon, on note $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\displaystyle\sum_{i \geq 0} x_i P(X = x_i)$ converge absolument, alors on dit que X admet une espérance, notée $E(X)$ définie par $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$.

Propriété : Soit X, Y deux VAR discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$admettant une espérance et λ un réel. Alors $X + \lambda Y$ admet une espérance et $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$.

Remarque :Si X et Y sont finies, l'existence de l'espérance est automatique. Sinon, il faut vérifier la convergence absolue des séries.

Définition : Une variable aléatoire dont l'espérance est nulle est appelée centrée.

Propriété :(théorème de transfert. admis) Soit X une VAR sur un espace probabilisé fini avec et u une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

— Si X est finie, on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Alors $u(X)$ admet une espérance et l'espérance de la VAR $u(X)$ est donnée par $E(u(X)) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) P(X = x_i)$

— Sinon on note $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\sum_{i \geq 0} u(x_i)P(X = x_i)$ converge absolument alors $u(X)$ admet une espérance et $E(u(x)) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(x_i)P(X = x_i)$.

Définition : Soit $r \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini Ω. Si X^r admet une espérance alors on dit que X admet un moment d'ordre r, noté $m_r(X)$ et on a $m_r(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r P(X = x_i)$ si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $m_r(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^r P(X = x_i)$ si $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$.

Remarque :le moment d'ordre 1 est l'espérance. Si une VAR admet un moment d'ordre r alors elle admet un moment d'ordre k pour tout $k \leq r$.

Définition : Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini Ω. Si X admet un moment d'ordre 2 alors on appelle variance de X le réel définie par $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

Remarque :$V(X) = 0$ ssi X est quasi-constante, i.e e si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.

Propriété :(Formule de Koenig-Huygens) Soit X une VAR sur un espace probabilisé fini Ω. La variance de X est donnée par la formule $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini Ω. Alors $V(X) \geq 0$.

Propriété : Si (a, b) sont un couple de réels et X une VAR sur un espace probabilisé fini alors $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Définition : Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini Ω. L'écart-type de la variable aléatoire X est le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Définition : Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini Ω. Si $\sigma(X) = 1$ on dit que la variable est réduite.

Propriété : Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini Ω. On suppose que la variance de X est non nulle. Alors la variable aléatoire $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite appelée la VAR centrée réduite associée à X.

Propriété :(Inégalité de Markov) Soit X une variable aléatoire discrète fini Ω, à valeurs positives. On a $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

Propriété :(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une variable aléatoire discrète fini. Alors $\forall \varepsilon > 0, P([\mid X - E(X) \mid \geq \varepsilon]) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

IV. Lois usuelles

4.1 Loi uniforme Le modèle : Dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, on tire une boule au hasard. On note X le numéro de la boule tirée. Alors la loi de X est appelé loi uniforme sur $[|1;n|]$.

Définition : Soit n un entier non nul. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[|1;n|]$ si $X(\Omega) = [|1;n|]$ et
$\forall k \in [|1;n|], P([X = k]) = \frac{1}{n}$

Propriété : Si X suit une loi uniforme sur $[|1;n|]$ alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

4.2 Loi de Bernoulli Le modèle : Dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires, on sait qu'il y a une proportion p de boules blanches. On tire une boule au hasard. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule est blanche et sinon. Alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Définition : Soit $p \in]0;1[$. On dit qu'une VAR X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et $P([X = 1] = p$.

Propriété : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$.

4.3 Loi binomiale Le modèle : Dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires, on sait qu'il y a une proportion p de boules blanches. On tire n boules avec remise dans l'urne. On note X le nombre de boules blanches obtenues. Alors X suit une loi binomiale de paramètre n et p.

Définition : Soit n un entier non nul et $p \in]0;1[$. On dit que la VAR X suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = [|0;n|]$ et
$\forall k \in [|0;n|], P([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Propriété : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

4.4 Loi Hypergéométrique Le modèle : On considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. Soit n un entier inférieur à $b+r$. On tire simultanément n boules de l'urne et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues. Alors X suit une loi hypergéométrique de paramètres $b+r$, n, $\frac{b}{b+r}$.

Définition : Soit n et N deux entiers tels que $1 \leq n \leq N$ et $p \in]0;1[$ tel que Np soit un entier. On note $q = 1-p$. On dit qu'une VAR X suit une loi hypergéométrique de paramètres (N,n,p) si $X(\Omega) = [|max(0, n-Np); min(n, Np)|]$ et
$\forall k \in [|max(0, n-Nq); min(n, Np)|], P([X = k] = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Propriété : Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ alors $E(X) = np$ et $V(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$.

Propriété : Soit (X_N) une suite de VAR telle que X_N suit la loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p) où n et p sont fixés et N est un entier tel que Np est entier. soit k un entier de $[|0; n|]$ alors

$$\lim_{N \to +\infty} P([X_N = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

4.5 Loi géométrique Le modèle : Dans une urne contenant une proportion p de boules blanches et $1-p$ de boules noires, on tire successivement et avec remise une boule jusqu'à obtenir une première boule blanche. On note X le numéro du premier tirage qui amène une boule blanche.

Définition : Soit $p \in]0; 1[$ on dit que X suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On note alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Propriété : Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Remarque :La loi géométrique est aussi appelée loi du premier succès dans une suite d'expérience de Bernoulli indépendantes.

Simulation informatique :

Propriété :$P(X > k)(X > k + l) = P(X > l)$.

Remarque :On dit qu'il y a absence de mémoire chez une loi géométrique.

4.6 Loi de Poisson **Définition :**Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. On note $X \hookrightarrow (P)(\lambda)$.

Propriété : Si $X \hookrightarrow (P)(\lambda)$ alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Remarque :Une loi de Poisson permet de modéliser le nombre d'événements qui se produisent dans un laps de temps donné. Par exemple : nombre de clients qui se présentent à un guichet de poste en une heure, nombre de trams qui passent à un arrêt pendant 15 minutes. λ représente le nombre moyen d'événements dans le temps donné.

La simulation : import numpy as np np.random.poisson(lambda,n) #crée une liste de n tirages suivant la loi de poisson de paramètre λ.

Propriété : Si n est grand et p proche de 0 alors on peut approcher la loi binomiale de paramètre (n, p) par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$