Chapitre 8 Espaces vectoriels

I Structure de K-espace vectoriel

1.1 Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition :

Un ensemble E, muni d'un opération $+$ d'addition de deux éléments et de la multiplication d'un élément par un réel (ou un complexe) est appelé $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathbb{C}$-espace vectoriel) s'il vérifie les 10 propriétés suivantes :

1. L'addition de deux éléments est une loi de composition interne, c'est à dire que la somme de deux éléments de E est un élément de E. On dit aussi que E est stable par addition.
2. L'addition est associative.
3. Il existe un élément, noté 0_E, tel que
$$\forall x \in \mathbb{K}^n, x + 0_E = 0_E + x = x$$
Cet élément est appelé neutre de E pour l'addition. Il est unique.
4. Pour tout élément x de E il existe un opposé(ou symétrique pour l'addition), noté $-x$, tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$. L'opposé d'un élément est unique.
5. L'addition est commutative.
6. La multiplication d'un élément par un réel (ou un complexe) est une loi de composition externe, c'est à dire que le produit est un élément de E.
7. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
8. Pour tout élément $x \in E$, $1.x = x$.
9. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x) = \lambda.x + \mu.x$.
10. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Dans ce cas, un élément de E est appelé un vecteur et un réel (ou un complexe) est appelé un scalaire.

<u>Remarque</u> : Un ensemble E muni d'une addition et qui vérifie les cinq premières propriétés est appelé un groupe commutatif.

Dans la suite on note $\mathbb{K}$ pour représenter soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Propriété : (espaces vectoriels fondamentaux)

Les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n uplets d'éléments de K muni de l'opération d'addition et de produit par un scalaire.
2. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'opération de somme de deux polynômes et de produit d'un polynôme par un scalaire.
3. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré nà coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'opération de somme de deux polynômes et du produit d'un polynôme par un scalaire.

4. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, muni de l'opération de somme de deux matrices et du produit d'une matrice par un réel.
5. L'ensemble K^I des applications définies d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$, muni de la somme de deux applications et du produit d'une application par un scalaire.

Démonstration :
Remarque :

1. Il en existe d'autres (ex : ensemble des suites numériques à valeurs dans $\mathbb{K}$).
2. Généralement, on note avec des lettres majuscules les espaces vectoriels (E, F, G...), avec des lettres minuscules les vecteurs (x, y, z, e_1,...), avec des lettres grecques les scalaires (λ, μ, α,...).

Propriété : (Règles de calcul) :
Pour tout vecteur x d'un K-ev E et tout scalaire lambda on a : $0x = 0$, $\lambda 0_E = 0_E$
$\lambda.x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$
$(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$

Remarque : Cette propriété permet de simplifier les écritures. On notera $x - y$ pour $x + (-y)$.

1.2 Combinaisons linéaires

Définition : Pour tout entier naturel non nul k, un k-uplet $(e_1, e_2, ..., e_k)$ de vecteurs de E est appelé une famille finie de k vecteurs de E.
Exemple :

Définition : Un vecteur x de E est dit combinaison linéaire d'une famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de vecteurs de E s'il existe n scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$$

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'une famille $(e_1, ..., e_n)$ est noté $Vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Exemple :

II. Sous-espace vectoriel

Définition : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous ensemble de E. On dit que F est un sous espace vectoriel de E si :
— F est non vide
— Pour tout $(x, y) \in F^2$, $x + y$ appartient à F.
— Pour tout scalaire λ et tout vecteur x de F, le vecteur λx appartient à F.

Remarque : Autrement dit F est un sous espace de E si F est non vide, stable par addition et par multiplication.

Propriété : Soient $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous espace de E. L'ensemble F muni des opérations $+$ et $.$ est lui-même un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Remarque : le vecteur nul de F est également le vecteur nul de E. Pour montrer que F est non vide, on pourra montrer que le vecteur nul de E est le vecteur nul de F.

Propriété : (caractérisation des sous espaces vectoriels) Soit F un sous ensemble d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, E. F est un sous espace vectoriel si :

1. F est non vide.
2. $\forall (x, y) \in F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Remarque : Donc F est un sous espace vectoriel d'un espace E si F est non vide et stable par combinaison linéaire.

Propriété : L'intersection de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un espace vectoriel.

Démonstration :

Propriété : Toute intersection de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E est un sous espace vectoriel de E.

Propriété : L'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène à n inconnues est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration :

Propriété : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

III. Famille libre, famille génératrice

3.1 Sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice

Propriété : Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

L'ensemble $vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ des combinaisons linéaires de cette famille est un sous espace vectoriel de E. On l'appelle le sous espace vectoriel engendré par $(e_1, ..., e_n)$.

Démonstration :

Exemple :

Propriété : Soit F un sous espace vectoriel de E et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de F. Alors $vect(e_1, e_2, ..., e_n) \subset F$.

Remarque : Pour montrer qu'un ensemble est un sous espace vectoriel, on peut démontrer que c'est le sous espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.

Exemple :

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de p vecteurs de E est dite génératrice de E si pour tout x vecteur de E, il existe n scalaire $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$.

On a alors $E = vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Propriété : Soient E un espace vectoriel et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. Soit F le sous espace de E engendré par cette famille, c'est à dire $F = vect(e_1, e_2, ..., e_n)$.

On ne change pas l'espace engendré si :

— On change l'ordre des vecteurs de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

— On ajoute à un vecteur de la famille une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

— on multiplie un vecteur de la famille par un scalaire non nul.

— on ajoute à la famille un nombre finie de vecteurs de F.

— On enlève un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.

— On enlève le vecteur nul.

3.2 Famille libre de vecteurs

Définition : Une famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre si pour tout n-uplet de scalaires $\lambda_1, ...\lambda_n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

On dit aussi que les vecteurs de la famille sont linéairement indépendants.

Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Remarque : En d'autres termes une famille est libre si $(0; ..., 0)$ est l'unique famille de scalaire qui donne une combinaison linéaire nulle.

Exemple :

Propriété : Soit E un sous espace vectoriel et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ famille.

1. Si la famille est liée alors en changeant l'ordre des vecteurs la famille reste liée.
2. Une famille qui ne contient qu'un vecteur est liée si et seulement si ce vecteur est nul.
3. Une famille qui contient deux vecteurs $(e_1; e_2)$ est liée si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, c'est à dire si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $e_1 = \lambda e_2$ ou $e_2 = 0_E$.
4. La famille est liée si et seulement si un des vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Propriété : Soit E un sous espace vectoriel et $(e_1, e_2, ..., e_n)$ famille.

1. Si la famille est libre, elle le reste lorsqu'on change l'ordre.
2. Si la famille est libre, toute sous famille de cette famille reste libre.
3. Si la famille est libre et si deux vecteurs x et y de $vect(e_1, e_2, ..., e_n)$ sont égaux alors les scalaires de la combinaison linéaire sont égaux.

Propriété : toute famille finie de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.

Démonstration :

IV. Base, dimension

4.1 Base

Définition : Une famille finie $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E est une base finie de E si elle est libre et génératrice de E. Autrement dit si tout élément de E peut se décomposer en une unique combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$, ie

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_n), x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$$

les scalaires $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ sont appelés coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, ..., e_n)$.

Exemple :

Exemple : Base canonique de $\mathbb{K}^n$, de $K_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque : Lorsqu'une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est fixée à tout vecteurs $x \in E$, on peut donc associer une unique famille de scalaires, $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, les coordonnées de x dans la base E. On associe à cette famille de coordonnées une matrice colonne : $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ appelée matrice colonne des coordonnées de x.

4.2 Dimension

Définition : Un espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$ est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Un espace qui n'est pas de dimension finie est dit de dimension infinie.

Propriété : - **Définition** : (admis) Soit E un espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$ alors E admet une base finie. De plus, toute les bases de E ont le même nombre de vecteurs.

Ce nombre est appelé dimension de E et noté $dim(E)$. Par convention, la convention du singleton $\{0\}$ vaut 0.

Exemple :

Propriété : Soit E un espace de dimension finie n. Soit $(e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille libre de E. Alors il existe $(e_{p+1}, ..., e_n)$ tel que la famille $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E.

Propriété : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Toute famille libre possède au plus n éléments.
2. Toute famille libre de n vecteurs est une base.
3. Une famille qui possède strictement plus de n vecteurs est liée.

Propriété : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.
2. Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.
3. Aucune famille de strictement moins de n vecteurs n'est génératrice.

Remarque : Pour montrer qu'une famille de vecteurs qui contient autant de vecteurs que l'espace est une base, il suffit de montrer que cette famille est libre ou qu'elle est génératrice.

Exemple :

Propriété : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E alors F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$ avec égalité ssi $F = E$.

Définition : Soit $(v_1, ..., v_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle rang de la famille, noté $rg(v_1, ..., v_p)$, la dimension r du sous espace vectoriel $vect(v_1, ..., v_p)$. On a donc $rg(v_1, ..., v_p) = dim(vect(v_1, ..., v_p))$

Remarque : on peut calculer le rang d'une famille comme le rang des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.