Chapitre 7.A Révisions : Complexes, Polynômes

I. Complexes

Définition :
$\mathbb{C} = \{z = a + ib, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$.
Le réel a est la partie réelle de z, noté $\mathcal{R}e(z)$
Le réel b est la partie imaginaire de z, notée $\mathcal{I}m(z)$.

Propriétés : $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. (a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')
2. (a+ib)(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)

Propriété : Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Définition : Si $z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\overline{z} = a - ib$ est le conjugué de z.

Propriétés :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
4. z est un réel si et seulement s'il est égal à son conjugué
5. z est un imaginaire pur si et seulement s'il est l'opposé de son conjugué.
6. $z + \overline{z}$ est un réel. Plus précisément, $z + \overline{z} = 2\mathcal{R}e(z)$.
7. $z - \overline{z}$ est un imaginaire pur. Plus précisément, $z - \overline{z} = 2i\mathcal{I}m(z)$.
8. $z\overline{z}$ est un réel. Plus précisément, $z\overline{z} = \mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2$
9. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2}$

Définition : Si $z = a + ib, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors le module de z est défini par :
$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z, z' et tout réel λ, on a :

1. $|z| \geq 0$ avec égalité si et seulement si $z = 0$
2. $|\lambda z| = |\lambda||z|$
3. $\mathcal{R}e(z) \leq |z|$ et $\mathcal{I}m(z) \leq |z|$.
4. $|z| = |\overline{z}|$
5. $z\overline{z} = |z|^2$ et si $z \neq 0$ on a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
6. $|zz'| = |z||z'|$
7. Si z' est non nul, $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

8. $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ (inégalité triangulaire)

Définition : Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe ramené au repère $(o,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Soit z un complexe non nul dont l'image ponctuelle dans le plan complexe est le point M. Toute mesure d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OM}})$ est un argument du complexe z. Si a est un argument de z, on le note $a = arg(z)$.

L'argument de z compris dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$ s'appelle l'argument principal de z.

Définition : Soit z un nombre complexe non nul de module ρ et d'argument θ. On a alors $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ (forme trigonométrique de z).

Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul qui a pour forme algébrique $z=a+ib$ et pour forme trigonométrique $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$. Alors :

1. $\mathcal{R}e(z)=a=\rho\cos(\theta)$ et $\mathcal{I}m(z)=a=\rho\sin(\theta)$
2. $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos(\theta)=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\theta)=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Application : Soit x et y deux réels tels que $x^2+y^2=1$. Alors il existe $\theta \in [0;2\pi[$ tel que $(x,y)=(\cos(\theta),\sin(\theta))$.

Propriété : deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si leurs modules sont égaux et leurs arguments sont égaux modulo 2π.

Propriété : Si $z=\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ et $z'=\rho'(\cos(\theta')+i\sin(\theta'))$, alors :
$zz'=\rho\rho'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$

Propriété : Pour tous complexes z et z' et tout entier relatif n :

1. $arg(zz') \equiv arg(z)+arg(z')[2\pi]$
2. $arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$
3. $arg(z^n) \equiv narg(z)[2\pi]$
4. $arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z)-arg(z')[2\pi]$
5. $arg(\frac{1}{z}) \equiv arg(\overline{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$

Définition : $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x), x\in\mathbb{R}$ (exponentielle complexe).

Propriété : Si $z=\rho e^{i\theta}$ et $z'=\rho' e^{i\theta'}$, alors :

1. $zz'=\rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$
2. $z^n=\rho^n e^{in\theta}$

Propriété (formule de Moivre) :
$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta), \theta\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$

Propriété (Formules d'Euler) :
$\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \theta\in\mathbb{R}$

II. Polynômes

Définition : Soit n un entier, $(a_0, a_1, ..., a_n)$ $n+1$ éléments de l'ensemble $\mathbb{K}$. La fonction P qui à $x \in \mathbb{K}$ associe $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelé polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Définition : Le polynôme qui a tout $x \in \mathbb{K}$ associe 0 est appelé polynôme nul.

Propriété : Soit P un polynôme à coefficient réel. Alors P est nul si tous les coefficients de P sont nuls.

Propriété : Deux polynômes sont égaux si ils ont mêmes coefficients.

Propriété : Soit P un polynôme non nul. Alors il existe un unique n entier naturel et $(a_0, a_1, ..., a_n)$ une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}$ tel que $a_n \neq 0$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. n est alors appelé le degré de P. On le note $\deg(P)$.

Le monôme $a_n X^n$ est appelé monôme dominant et le coefficient a_n est appelé coefficient dominant.

Par convention, le polynôme nul a pour degré $-\infty$.

Définition : L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n non nul, à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle polynôme dérivé de P, le polynôme $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Le polynôme dérivée d'un polynôme constant est le polynôme nul.

Définition : Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n non nul, à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle i^{eme} dérivé de P le polynôme $P^{(i)}$ défini pour tout entier naturel i par la récurrence $P^{(0)} = P$ et $\forall i \in \mathbb{N}, P^{(i+1)} = (P^{(i)})'$.

Définition : Soit P et Q deux polynômes et soit λ un élément de $\mathbb{K}$.

La somme de P et Q, notée $P+Q$ est le polynôme défini par $P+Q(x) = P(x) + Q(x)$.

Le produit de P par λ, noté λP, est le polynôme défini par $\lambda P(X) = \lambda \times P(x)$.

Le produit de P et Q, noté PQ est le polynôme défini par $PQ(X) = P(X) \times Q(X)$.

Propriété : Soient P et Q deux polynômes tels que $PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Définition : Soient P et Q deux polynômes.

On note $P \circ Q$ le polynôme défini par $P \circ Q(X) = P(Q(x))$.

Propriété : : $deg(P') = dep(P) - 1$ si P est non constant.
deg($P + Q$)$\leq$max(deg(P),deg(Q)).
deg(λP)=deg(P) si λ est non nul.
deg(PQ)=deg(P)+deg(Q)
deg($P \circ Q$)=deg(P)deg(Q).

Définition : Soit P et Q deux polynômes. P se factorise par Q s'il existe un polynôme R tel que $P(X) = Q(X)R(X)$.

Définition : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. On dit que P se factorise par $X - a$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Remarque : Si $P(X) = Q(X)R(X)$ alors deg(R)=deg(P)-deg(Q).

Définition : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.

Propriété : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. Alors P se factorise par $X - a$ si et seulement si a est une racine de P.

Définition : Soit P un polynôme non constant et a un élément de $\mathbb{K}$. On dit que a est une racine multiple d'ordre de multiplicité r s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - a)^r Q(x)$ et $Q(a) \neq 0$. r s'appelle l'ordre de multiplicité de a.

Propriété : Soit P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et soit a un élément de $\mathbb{K}$.
a est racine de P d'ordre de multiplicité $r \iff \quad P(a) = ... = P(r-1)(a) = 0$ et $P(r)(a) \neq 0$.

Propriété : (Théorème de d'Alembert-Gauss) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Propriété : Tout polynôme de degré n à coefficients complexes peut s'écrire comme le produit de n polynôme de degré 1.

Propriété : Soit P un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Il admet n racines complexes, chacune comptée avec son ordre de multiplicité. De plus,les racines non réelles sont conjuguées deux à deux et de même ordre.

Propriété : Tout polynôme à coefficient réels peut être écrit sous la forme d'un produit de polynômes à coefficients réels, soit de degré 1, soit de degré 2, sans racine réelle.