

Exercices : Espaces vectoriels

Exercice 1 : Sous espaces vectoriels de K^n Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du K —espace vectoriel K^n et en donner une base et sa dimension lorsque c'est le cas.

- | | |
|--|--|
| 1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$ | 5. $F = Vect((1, 2, 1), (3, 1, 1), (-1, 8, 3))$ |
| 2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ | 6. $F = \{(a+b, a-2c, b+3c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^4\}$ |
| 3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\}$ | 7. $F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 + \overline{z_2} = 0\}$ |
| 4. $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \right\}$ | 8. $F = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, iz_1 - 2z_2 = 0\}$ |

Exercice 2 : Sous-espaces vectoriels de l'ensemble des matrices Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ —espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base et sa dimension lorsque c'est le cas.

- | | |
|---|---|
| 1. $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), m_{1,1} = 1\}$ | 4. $F = GL_n(\mathbb{R})$ |
| 2. $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \sum_{i=1}^3 m_i = 0\}$ | 5. F est l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ |
| 3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a & a+b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ | 6. F est l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ |

Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels de l'ensemble des polynômes Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ —espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et en donner une base et sa dimension lorsque c'est le cas.

- | | |
|--|--|
| 1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P' = 3X\}$ | 4. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P = XP'\}$ |
| 2. $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X], P'' = 0\}$ | |
| 3. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], \deg P = 2\}$ | 5. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(2) = 0\}$ |

Exercice 4 : Sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ —espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- | | |
|--|--|
| 1. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ croissante}\}$ | 4. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lim_{+\infty} f = +\infty\}$ |
| 2. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ s'annule}\}$ | |
| 3. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ paire}\}$ | 5. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \lim_{+\infty} f = 0\}$ |

/

Exercice 5 : Sous-espaces vectoriels de l'ensemble des suites On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles muni de l'addition et de la multiplication par un réel $+$ et $\cdot$ usuelles.

1. Vérifier que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et en donner une base et la dimension lorsque cela est demandé.
 - (a) F est l'ensemble des suites convergentes
 - (b) F est l'ensemble des suites convergeant vers 0
 - (c) F est l'ensemble des suites solutions de l'équation $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (donner une base et la dimension)

Exercice 6 : Familles libres

1. Dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^3$, étudier si les familles $\mathcal{F}$ suivantes sont libres :
 - (a) $\mathcal{F} = \{(2, 1, -1), (1, 1, 1), (2, 1, 2)\}$
 - (b) $\mathcal{F} = \{(1, 2, 1), (3, 1, 1), (-1, 8, 3)\}$
2. Dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, étudier si les familles $\mathcal{F}$ suivantes sont libres :
 - (a) $\mathcal{F} = \{x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto 1\}$
 - (b) $\mathcal{F} = \{x \mapsto |x|, x \mapsto |x - 1|, x \mapsto |x - 2|\}$
 - (c) $\mathcal{F} = \{x \mapsto e^{ax}, x \mapsto e^{bx}, x \mapsto e^{cx}\}$ avec a, b, c trois réels distincts
3. Dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, étudier si les familles $\mathcal{F}$ suivantes sont libres :
 - (a) $\mathcal{F} = \{X(X - 1), X^2 + 2, (X - 1)(X - 2)\}$
 - (b) $\mathcal{F} = \{X^2, X(X + 1), X(X + 2)\}$
 - (c) $\mathcal{F} = \{X - 1, X^2 - 2, X^3 - 3\}$

Exercice 7 : Coordonnées dans une base

1. On travaille dans le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathbb{K}^3$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 1))$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
 - (b) Déterminer les coordonnées de $(3, 1, -5)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B} = (1, X, X(X - 1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
 - (c) En déduire la nature et la somme de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3n^2 - 4n + 6}{2^n}$$