Programme de colle : du 02/12 au 06/12 (s10)

La colle doit comporter une question de cours (parmi celles indiquées ***ou une définition du cours, ou l'énoncé d'une propriété****) et un ou plusieurs exercice(s). Un(e) élève qui ne sait pas traiter la question de cours n'a pas la moyenne.*

Espaces vectoriels

— Définition d'un espace vectoriel. Ex fondamentaux : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni des opérations de sommes et de produits par un scalaire. Famille de vecteurs, combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs.
— Sous-espace vectoriels d'un espace vectoriel, caractérisations, un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Exemple fondamental de $\mathbb{R}_n[X]$, des solutions d'un système linéaires homogène. Intersection de sous-espaces vectoriels.
— Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Famille génératrice d'un espace vectoriel, propriété des familles génératrices. Famille libre, famille liée, propriétés des familles libres et des familles liées. Propriété des familles de polynômes à degrés deux a deux distincts.
— Base d'un espace vectoriel, espace de dimension finie, espace de dimension infini, dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, base canonique et dimension des e-v fondamentaux. Théorème de la base incomplète. Lien entre dimension et famille libre, dimension et famille génératrice. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Rang d'une famille de vecteurs.

Questions de cours

— L'intersection de deux sev est un sev (avec démonstration).
— Définition et propriété de $Vect(e_1, ...e_p)$ (avec démonstration).
— Définition de famille génératrice, famille libre, base.
— Énoncé des propriétés sur famille libre, famille génératrice et dimension (sans démonstration).

Applications linéaires

— Application linéaire entre deux espaces vectoriels. Caractérisation d'une application linéaire. Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire.
— La somme de deux applications linéaires est linéaire, le produit d'une application linéaire par un scalaire est linéaire, la composée de deux applications linéaires est linéaire, la réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
— Ensemble image d'une application linéaire. l'ensemble image d'une application linéaire est un espace vectoriel. Image d'une famille génératrice par une application linéaire. Caractérisation de la surjectivité. rang d'une application linéaire.
— Noyau d'une application linéaire. Le noyau est un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité par le noyau. Image d'une famille libre par une application injective. Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d ?une base est une base.

— Matrice d'une application linéaire dans des bases quelconques (dans le cas de dimensions finies), application linéaire canoniquement associée à une matrice. Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaire, matrice d'une composée d'applications linaires, matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.
— Lien entre rang d'une famille, rang d'une application linéaire, rang d'une matrice et rang d'un système. Le rang de la transposée d'une matrice est égal au rang de la matrice. Théorème du rang, équivalence de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité si les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension finie.
— Matrice de passage entre deux bases. Inversibilité et expression de l'inverse d'une matrice de passage. Formule du changement de base pour un vecteur, formule du changement de base pour la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes. Deux matrices semblables ont le même rang. Si deux matrices sont semblables et l'une est inversible alors l'autre est inversible et les inverses sont semblables.

Questions de cours

— Le noyau (l'ensemble image) d'une application linéaire est un sev de l'espace de départ (respectivement d'arrivée) (avec démonstration).
— Caractérisation de l'injectivité par le noyau (avec démonstration).
— la réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire (avec démonstration).
— Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases de l'espace de départ et d'arrivée.
— Formules de changement de base (sans démonstration)
— Matrices semblables (définition).