Exercices : Révisions algèbre

Exercice 1 : module, argument, calcul algébrique
On pose $u = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer u^2 puis u^4.
2. Déterminer le module et un argument de u.
3. Calculer $\cos(\frac{3\pi}{8})$.

Exercice 2 : un classique
Pour n entier naturel, on pose $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ et $R_n = C_n + iS_n$.
Calculer C_n et S_n pour tout n entier naturel.

Exercice 3 : Formule de Moivre

Développer $\cos(4\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{16})$.

Exercice 4 : Transformer une somme en produit
Résoudre l'équation $\cos(2\theta + \frac{\pi}{5}) + \cos(3\theta - \frac{\pi}{4}) = 0$ (on pourra se ramener à un produit, à l'aide de la technique de l'angle moitié).

Exercice 5 : Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

1. Montrer que le polynôme $X^2 - X$ divise le polynôme $(X-1)^{2n} - 2X^n + 3X - 1$ pour tout n entier naturel non nul.
2. Montrer que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ divise le polynôme $X^n - n(X-1) - 1$ pour tout n entier naturel non nul.
3. Montrer que X^2+X+1 divise le polynôme $(X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$ pour tout n entier naturel non nul.

Exercice 6 : Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$
On pose $P(X) = 2X^4 + 9X^3 + 13X^2 + X - 5$

1. Montrer que $i-2$ est une racine de P. En déduire sans calcul une autre racine de P.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 7 : Une autre démonstration de la formule de Vandermonde
Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$.

En considérant le polynôme $(X+1)^{m+n}$ démontrer que $\forall k \in [|0, m+n|]$, $\displaystyle\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l}\binom{n}{k-l} = \binom{m+n}{k}$.

Exercice 8 : Résolution de systèmes
Déterminer le rang et résoudre les systèmes suivants (on pourra discuter en fonction du paramètre réel λ).

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & t & = & 3 \\ -3x & + & y & + & 2z & + & t & = & -8 \\ x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & 5 \\ 2x & - & 3y & + & z & - & 3t & = & 3 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & z & = & 3 \\ 5x & + & 5y & - & 9z & = & 7 \\ 2x & - & 6y & + & 14z & = & -2 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{rcrcr} (1-\lambda)x & - & y & = & 0 \\ -x & + & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$

4. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\lambda x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & \lambda y & + & \lambda z & = & 0 \\ x & - & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 9 :

1. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et si c'est le cas, déterminer leur inverse.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

   (e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer A^2 et A^3.

   (b) Déterminer trois réels (x, y, z) tels que $A^3 + xA^2 + yA + zI_3 = 0$.

   (c) En déduire que A est inversible et son inverse.

   (d) En écrivant A sous la forme $2I_3 + B$ avec B une matrice 3×3, calculer A^n pour tout n entier naturel.

Exercice 10 : matrices et suites

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 1, v_0 = 2$ et
$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 2v_n.$
On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer une matrice A qui vérifie $X_{n+1} = AX_n$
2. Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_2$.
3. En déduire que pour tout n entier naturel, il existe un couple (α_n, β_n) de réels tel que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.
4. Montrer que (α_n) est une suite récurrente d'ordre 2 et déterminer l'expression de son terme général.
5. En déduire X_n pour tout n entier naturel.