

Chapitre 9 Réduction

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $f \in L(E)$ est un endomorphisme de E , $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n .

I. Éléments propres

1.1 Pour un endomorphisme

Définition : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur v non nul de E tel que $f(v) = \lambda v$.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f , noté $Sp(f)$.

Exemple :

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f . Un vecteur v de E est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ si $v \neq 0$ et $f(v) = \lambda v$.

L'ensemble $E_\lambda(f) = \{v \in E, f(v) = \lambda v\}$ s'appelle l'espace propre de f associé à la valeur propre λ .

Exemple :

- Déterminer les valeurs propres de l'application suivante après avoir montré que c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (x + 2y, 2x - y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- On pose $g(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P', \forall P \in \mathbb{R}_2[X], P_1 = 1 - X^2, P_2 = 1 + 2X + X^2$.
 1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
 2. Montrer que P_1 et P_2 sont des vecteurs propres de g .
 3. Montrer que -1 est une valeurs propres de g est déterminer les vecteurs propres associés à la valeurs propres -1 .
- Montrer que f est n'est pas injective ssi 0 est valeur propre de f .

Remarque :

- on a toujours $0 \in E_\lambda(f)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
- λ est une valeur propre de f ssi $E_\lambda(f) \neq \{0\}$.
- Si λ est une valeur propre de f alors il existe une infinité de vecteur propre pour la valeur propre λ . Démonstration :

Propriété : $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id)$ et en particulier $E_\lambda(f)$ est un $K - ev$

Démonstration :

1.2 Pour une matrice

Définition : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur $X \in K^n$ non nul de E tel que $MX = \lambda X$.

L'ensemble des valeurs propres de M est appelé le spectre de M , noté $Sp(M)$.

Remarque : Une matrice peut ne pas admettre de valeurs propres.

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de M . Un vecteur X de $\mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ si $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$.

L'ensemble $E_\lambda(M) = \{X \in \mathbb{K}^n, MX = \lambda X\}$ s'appelle l'espace propre de M associé à la valeur propre λ .

Propriété : Soit $f \in L(E)$, B une base de E et $A = \mathcal{M}_B(f)$.

1. $V \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ ssi le vecteur $v \in E$ de coordonnées V dans la base B est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ .
2. λ est valeur propre de A ssi c'est une valeur propre de f .

Remarque : Travail équivalent sur les matrices ou sur les applications linéaires.

II. Calcul des éléments propres

2.1 Propriétés

Propriété : (Caractérisation d'une valeur propre)

λ est une valeur propre de f ssi $E_\lambda(f) \neq 0$ ssi $\ker(f - \lambda Id) \neq 0$ ssi $\dim \ker(f - \lambda Id) > 0$ ssi $\text{rg}(f - \lambda Id) < n$

Remarque :

- De même si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in Sp(M) \Leftrightarrow \text{rg}(M - \lambda I) < n$.
- Le calcul du rang d'une matrice se fait en l'écrivant sous forme triangulaire par opérations élémentaires et en comptant son nombre de pivots non nuls, ou en comptant le nombre de lignes (ou de colonnes) linéairement indépendantes.

Propriété : L'ensemble des valeurs propres d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

Démonstration :

Remarque : cas particulier des matrices diagonales.

Propriété : Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Démonstration :

2.1 Recherche des valeurs propres et des espaces propres

Exemple : Méthode

III. Diagonalisation

3.1 Famille de vecteurs propres **Propriété :** Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres. Alors la famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Démonstration :

Propriété : Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.

Propriété : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $B_1, \dots, B_p$ des bases respectives de ces valeurs propres. Alors la famille $(B_1, \dots, B_p)$ obtenue en concaténant les bases, est libre.

Démonstration :

Exemple :

3.2 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition : On dit que f est diagonalisable ssi il existe une base B de E constituée uniquement de vecteurs propres pour f .

Exemple : : homothétie.

Propriété : f est diagonalisable ssi il existe une base B dans laquelle la matrice M de f est diagonale c'est à dire ssi il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}MP$.

Définition : On dit qu'une matrice M est diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété : une matrice est diagonalisable ssi l'application linéaire canoniquement associée à M est diagonalisable.

Propriété : On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ les valeurs propres distinctes de f (resp. M). Alors f (resp. M) est diagonalisable ssi $\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) = n$.

Démonstration :

Propriété : Si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable et tous les espaces propres sont de dimension 1.

Démonstration :

Remarque : Une matrice diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre est une matrice diagonale. Une matrice diagonalisable qui n'a que 0 comme valeur propre est la matrice nulle.

Propriété : Une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Remarque : ce résultat ne s'applique pas pour les matrices dont les coefficients sont complexes.

Remarque : Méthode de diagonalisation.

Exemple :

- Diagonalisation d'une matrice
- Diagonalisation d'une AL
- Calcul de $M^k, \forall k \in \mathbb{N}$.