Chapitre 11 Équations différentielles synthèse

Définition : On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation du type $y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \forall t \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ y est une fonction de classe C^1 inconnue, a et b sont deux fonctions continues sur I. Si b est la fonction nulle, on dit que l'équation est homogène. Si on indique $y(t_0)$ pour un $t_0 \in I$, on dit qu'on résout un problème de Cauchy.

Définition : On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation du type $(E) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t), \forall t \in I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, y est une fonction inconnue de classe C^2, a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$. L'équation $(E) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \forall t \in I$ est l'équation linéaire homogène associée à (E) et on appelle polynôme caractéristique de (E) le polynôme P défini par $P(X) = aX^2 + bX + c$. Si on indique $y(t_0)$ et $y'(t_0)$ pour un $t_0 \in I$, on dit qu'on résout un problème de Cauchy.

Propriété : (principe de superposition) On considère les équations $(E_1) : y' + ay = b_1$ et $(E_2) : y' + ay = b_2$. Soit y_1 et y_2 des solutions respectives de E_1 et E_2 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $y_1 + \lambda y_2$ est solution de l'équation $(E) : y' + ay = b_1 + \lambda b_2$.

On considère les équations $(E_1) : ay''(t)+by'(t)+cy(t) = f_1$ et $(E_2) : ay''(t)+by'(t)+cy(t) = f_2$. Soit y_1 et y_2 des solutions respectives de E_1 et E_2 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $y_1 + \lambda y_2$ est solution de l'équation $(E) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f_1 + \lambda f_2$.

Propriété : On note S l'ensemble des solutions d'une équation E et S_H l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée, E_H. Soit y_0 une solution de E alors :

$S = \{y_0 + y | y \in S_H\}$

Méthode générale de résolution : 1/ trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène. 2/ trouver une solution particulière de l'équation. 3/ conclure par principe de superposition en faisant la somme d'une solution de l'équation homogène et de la solution particulière.

Propriété : Soit $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$, une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1. On suppose qu'il existe une fonction A, dérivable sur I et qui vérifie $A'(t) = a(t), \forall t \in I$. Alors pour tout réel C, la fonction $y_0(t) = Ce^{-A(t)}$ définie et dérivable sur I, est solution de (E). De plus toute solution de (E) est de la forme $t \mapsto Ce^{-A(t)}$.

C se détermine à l'aide des conditions initiales

Méthode de la variation de la constante : Pour déterminer une solution particulière d'une EDL_1 du type $(E) : y' + ay = b$, on peut poser :

$y_0(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a et C est une fonction de classe C^1 à déterminer.

Propriété : On considère l'équation différentielle $(E) : ay''(t)+by'(t)+cy(t) = 0$ de polynôme caractéristique P. On note λ et μ les deux racines de P.

1. Si λ et μ sont deux réels distincts alors les solutions sur I de (E) sont les fonctions y définies par $y(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t}$ avec (A, B) deux réels.

2. Si $\lambda = \mu$, alors les solutions sur I de (E) sont les fonctions y définies par $y(t) = (A+Bt)e^{\lambda t}$ avec (A, B) deux réels.
3. Si λ et μ sont deux complexes distincts conjugués, alors on note$\lambda = r + i\omega$ sous forme algébrique.

   Les solutions sur I de (E) sont les fonctions y définies par $y(t) = e^{rt}(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))$ avec (A, B) deux réels.

A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales.

Propriété :

1. Les équations du type $y' + ay = b$, avec $a \neq 0$, une solution particulière est $y_0(t) = \frac{b}{a}$.
2. Soit l'équation $y'' + ay' + by = c$ une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Une solutions particulière de cette équation est de la forme $y_0(t) = \frac{c}{b}$ si b est non nul. Si b est nul, on pose $z(t) = y'(t)$ et on résout d'abord l'équation en z.

Définition : On appelle équation différentielle autonome d'ordre 1, toute équation du type $y'(t) = f(y(t))$ où f est une fonction à valeur réelle, continue sur un intervalle I.

Méthode : Attention : ces équations ne sont pas linéaires. On ne peut pas appliquer le principe de superposition ! Pour les résoudre on peut utiliser la "séparation des variables" en se ramenant, par exemple à $\frac{y'(t)}{f(y(t))} = 1$ (à condition que f ne s'annule pas), puis en intégrant la relation.