Programme de colle : du 09/12 au 13/12 (s11)

La colle doit comporter une question de cours (parmi celles indiquées ***ou une définition du cours, ou l'énoncé d'une propriété****) et un ou plusieurs exercice(s). Un(e) élève qui ne sait pas traiter la question de cours n'a pas la moyenne.*

Applications linéaires

- Application linéaire entre deux espaces vectoriels. Caractérisation d'une application linéaire. Image d'une combinaison linéaire par une application linéaire.
- La somme de deux applications linéaires est linéaire, le produit d'une application linéaire par un scalaire est linéaire, la composée de deux applications linéaires est linéaire, la réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
- Ensemble image d'une application linéaire. l'ensemble image d'une application linéaire est un espace vectoriel. Image d'une famille génératrice par une application linéaire. Caractérisation de la surjectivité. rang d'une application linéaire.
- Noyau d'une application linéaire. Le noyau est un espace vectoriel. Caractérisation de l'injectivité par le noyau. Image d'une famille libre par une application injective. Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d ?une base est une base.
- Matrice d'une application linéaire dans des bases quelconques (dans le cas de dimensions finies), application linéaire canoniquement associée à une matrice. Matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaire, matrice d'une composée d'applications linaires, matrice de la réciproque d'une application linéaire bijective.
- Lien entre rang d'une famille, rang d'une application linéaire, rang d'une matrice et rang d'un système. Le rang de la transposée d'une matrice est égal au rang de la matrice. Théorème du rang, équivalence de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité si les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension finie.
- Matrice de passage entre deux bases. Inversibilité et expression de l'inverse d'une matrice de passage. Formule du changement de base pour un vecteur, formule du changement de base pour la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables. Deux matrices sont semblables ssi elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes. Deux matrices semblables ont le même rang. Si deux matrices sont semblables et l'une est inversible alors l'autre est inversible et les inverses sont semblables.

Questions de cours

- Le noyau (l'ensemble image) d'une application linéaire est un sev de l'espace de départ (respectivement d'arrivée) (avec démonstration).
- Caractérisation de l'injectivité par le noyau (avec démonstration).
- la réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire (avec démonstration).
- Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases de l'espace de départ et d'arrivée.
- Formules de changement de base (sans démonstration)
- Matrices semblables (définition).

Réduction

— Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres (pour un endomorphisme, pour une matrice). Cas de la valeur propre 0. Un endomorphisme et sa matrice associée dans une base ont même valeurs propres. Deux matrices semblables ont même valeurs propres. Caractérisation d'une valeur propre par l'endomorphisme $f - \lambda Id$ ou la matrice $A - \lambda Id$. Valeurs propres d'une matrice triangulaire. Méthode de détermination pratique des valeurs propres et sous-espaces propres.
— Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Un endomorphisme d'un espace de dimension n a au plus n valeurs propres distinctes. La juxtaposition des bases des sous-espaces propres est une famille libre. Caractérisation de la diagonalisabilité par la somme des dimensions des sous espaces propres. Deux conditions suffisantes : (n valeurs propres distinctes dans un espace de dimension n) ou (matrice symétrique à coefficients réels).
— Applications de la diagonalisation.

Questions de cours

— Éléments propres d'un endomorphisme (d'une matrice).
— Deux matrices semblables ont même valeurs propres (avec démonstration).
— Caractérisation d'une valeur propre pour un endomorphisme.
— Une famille constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre (avec démonstration).
— Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (sans démonstration).