Exercices : Réduction

Exercice 1 : Réduction de matrices Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs propres de la matrice M et les espaces propres associés ; M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Et sur $\mathbb{C}$?

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
6. $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : Réduction d'endomorphismes Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f et les espaces propres associés ; f est-il diagonalisable ?

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$
2. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y, y + z, x + 2y + z) \in \mathbb{R}^3$
3. $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mapsto^t M \in \mathcal{M}_\in(\mathbb{K})$
4. $f : P \in \mathbb{K}_3[X] \mapsto XP' \in \mathbb{K}_3[X]$
5. $f : aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto cX^2 + a \in \mathbb{K}_2[X]$

Exercice 3 : Réduction de matrices sans calculs Dans chacun des cas suivants, déterminer sans aucun calcul si la matrice M est diagonalisable.

1. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : Polynômes de matrices et application à la réduction Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$et $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$. On notera $P(A)$ la matrice $a_0I_n + a_1A + ... + a_nA^n$.

1. On suppose que $P(A) = 0$, c'est-à-dire que $P(A)$ est la matrice nulle. Soit λ une valeur propre de A, montrer que $P(\lambda) = 0$.
   La réciproque est-elle vraie ? On pourra regarder le cas de $A = I_n$ et $P(X) = X^2 - X$.
2. On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
   Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = 0$. En déduire si la matrice A est diagonalisable.

3. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $A^2 - 10A + 25I_n = 0$. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5 : Calcul des puissances d'une matrice non diagonalisable Dans cet exercice, on étudie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. On étudie ici la diagonalisablité de A.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) Donner les espaces propres associés.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On cherche tout de même à exprimer A sous une forme plus simple.
   (a) Montrer, en effectuant un changement de base, que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n et en déduire A^n.

Exercice 6 : Un endomorphisme sur un espace de polynômes On se donne $n \geq 3$ et on travaille sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. On définit :$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = (X^2+1)P'' - 2XP'$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de f.
3. Montrer que $\ker f \subset \mathbb{R}_3[X]$ et en donner une base.
4. Déterminer $\ker(f + 2\mathrm{Id}_E)$.
5. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 7 : diagonalisation d'une matrice de taille n

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & (0) & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Déterminer le rang de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?