DM 0

Exercice 1 : analyse
On considère la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Déterminer le développement limité en 0 de f, à l'ordre 2.
   (c) Étudier le comportement de f en 0. (limite et tangente)
   (d) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f.
   (e) Soit $h(x) = (x-1)e^x + 1$. Déterminer le signe de h et en déduire le sens de variations de f.
   (f) On pose $g(x) = f(x) - x$. Montrer que $g(x) = f(-x)$ et en déduire son signe.
   (g) Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$
2. On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que u est décroissante et minorée par 0.
   (b) Montrer que sa limite ne peut pas être strictement positive. Déterminer sa limite.

Exercice 2 : algèbre

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. (a) Calculer K^2.
   (b) En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1}.
2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.
   (a) Montrer : $\quad M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.
   (b) En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M.
3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatre éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = f(e_1) \qquad v_3 = e_3 \qquad v_4 = f(e_3)$$

(a) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, déterminer l'expression de $f(x, y, z, t)$.

(b) Déterminer $Ker(f)$ et en déduire que f est injective.

(c) Montrer que f est bijective et déterminer l'expression de f^{-1}.

(d) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(e) Exprimer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$, $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 3 : probabilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$.

1. Un joueur extrait un jeton au hasard de cette urne. Soit X le numéro aléatoire obtenu.

   (a) Quelle est la loi de X, son espérance et sa variance ?

2. Ce joueur effectue à présent deux essais avec remise. On note F la variable aléatoire égale au premier numéro et S celle égale au second. Enfin Y est le plus grand des deux numéros obtenus.

   (a) Pour tout $i \in [[1, 2n]]$, déterminer $p(F \leq i)$ et $p(S \leq i)$.
   En déduire $p(Y \leq i)$.

   (b) Justifier que $(Y \leq i) = (Y \leq i - 1) \cup (Y = i)$
   En déduire que pour tout i de $[[1, 2n]]$,
   $$p(Y = i) = \frac{2i - 1}{4n^2}$$

   (c) Calculer $\sum_{i=1}^{2n} p\,(Y = i)$. Calculer l'espérance de Y

3. Ce joueur a enfin droit à deux esssais au maximum.
   Il décide d'utiliser la stratégie suivante : Il se donne un nombre k entre 1 et $2n$
   — si le premier tirage amène un jeton dont le numéro est au moins k, il s'arrête
   — si le premier tirage amène un jeton dont le numéro est strictement plus petit que k, il replace alors ce jeton dans l'urne et effectue alors un deuxiéme tirage.

   On note Z le numéro aléatoire obtenu par le joueur à son *dernier* tirage. (i.e. le premier si le 1er numéro est au moins k, sinon, le second).

   (a) Pour $i < k$, décomposer $(Z = i)$ en fonction de F et de S.
   En déduire que
   $$p(Z = i) = \frac{k - 1}{4n^2} \text{ si } i \in [[1, k - 1]]$$

   (b) Faire de même pour $i \geq k$; en déduire que
   $$p(Z = i) = \frac{2n + k - 1}{4n^2} \text{ si } i \in [[k, 2n]]$$

   (c) Calculer$\sum_{i=1}^{2n} p(Z = i)$et justifier ce résultat.

   (d) Calculer l'espérance de Z.

   (e) Pour quelle valeur de k, $E(Z)$ est-elle maximale ? Que vaut ce maximum ?

   (f) Vérifier que la règle du 2) donne une espérance supérieure à n'importe quelle stratégie relative à la question 3).