??? Devoir en temps libre 1.

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \arctan^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.
2. Montrer que : $\forall x \geqslant 0$, $\arctan x \leqslant x$.
   En déduire que : $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant v_n$.
3. (a) À l'aide du théorème des accroissements finis, établir que : $\forall k \geqslant 1$, $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) \geqslant \dfrac{\sqrt{k}}{k+1}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \geqslant 1$, $u_n - v_n \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{2k+1}{(1+k)^2}$.
   (c) En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que : $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n - v_n \leqslant \dfrac{C}{n}$.
4. La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.
   Indication. On pourra remarquer que (u_n) et (v_n) ont la même limite, puis utiliser les sommes de Riemann pour calculer la limite de (u_n).

Exercice 2.

On considère une protéine constituée de la succession linéaire d'acides aminés de cystéine, d'aspartate et de glutamate que l'on notera respectivement C, D et E.
Cette protéine vérifie de plus la propriété suivante : sa structure primaire peut-être représentée par des séquences successives de lettres telles que chaque séquence commence par la lettre C et ne comporte jamais deux lettres consécutives identiques.

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on notera $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des séquences possibles de n lettres et $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{D}_n$ et $\mathscr{E}_n$ les séquences possibles de n lettres se terminant respectivement par C, D et E. On définit alors : $\forall n \geqslant 1, \quad c_n = \mathrm{card}(\mathscr{C}_n), \quad d_n = \mathrm{card}(\mathscr{D}_n), \quad e_n = \mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$.

1. Calculs de quelques valeurs des $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (a) Calculer c_1, d_1 et e_1.
   (b) Calculer c_2, d_2 et e_2.
   (c) Calculer c_3, d_3 et e_3.
2. Soit $n \geqslant 1$. Déterminer $\mathrm{card}(\mathscr{S}_n)$ et en déduire que $c_n + d_n + e_n = 2^{n-1}$.
3. En étudiant l'avant-dernière lettre des séquences de $\mathscr{C}_{n+1}$, démontrer que : $\forall n \geqslant 1, \quad c_{n+1} = d_n + e_n$.
4. En s'inspirant de la question précédente, justifier que : $\forall n \geqslant 1, \quad d_{n+1} = c_n + e_n$ et $e_{n+1} = c_n + d_n$.
5. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $d_n = e_n$.
6. Déduire des questions précédentes la relation suivante : $\forall n \geqslant 1, \quad c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$.
7. En déduire l'expression de c_n en fonction de $n \geqslant 1$ puis celle de d_n et e_n.
8. On remarque que le résultat précédent permet d'obtenir $c_8 = 42$ et $d_8 = 43$.
   Pour la question suivante, on ne cherchera pas à calculer une valeur numérique des résultats ; chaque réponse devra être justifiée.
   Combien existe-t-il de structures primaires différentes formées par la succession de :
   (a) cinq séquences identiques de $\mathscr{C}_8$?
   (b) cinq séquences différentes de $\mathscr{C}_8$?
   (c) trois séquences identiques de $\mathscr{C}_8$ et deux séquences identiques de $\mathscr{D}_8$ (pas forcément dans cet ordre) ?
   (d) trois séquences différentes de $\mathscr{C}_8$ et deux séquences différentes de $\mathscr{D}_8$ (pas forcément dans cet ordre) ?