DEVOIR SURVEILLÉ 1.

gray

— *Durée : 3h.*
— *Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentation.*
— *L'usage d'une calculatrice n'est pas autorisée pour cette épreuve.*
— *Les questions d'informatique devront être rédigées en langage Python exclusivement.*
— *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
— *Les deux exercices et le problème peuvent se traiter indépendamment.*

gray

Exercice 1 : Étude d'une suite récurrente.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

1. **Étude de la suite (u_n).**
   (a) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
   (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite que l'on note α.
   (d) Écrire une fonction Python qui prend comme argument un entier n et qui calcule le terme d'indice n de la suite (u_n).
2. **Approximation de α.**
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
   (c) Écrire une fonction Python qui prend comme argument un réel strictement positif *eps* et qui renvoie une approximation de α à *eps* près.

gray

Exercice 2 : Suite implicite.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0,1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0,1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.
   (b) Établir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

gray

Problème : Autour de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et } f(0) = 1.$$

1. **Représentation graphique de la fonction f.**
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
   (c) Afin d'étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, nous introdusions la fonction $g : x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x)$.
      i. Etudier le signe de g sur $[0, \pi]$ puis les variations de f sur $[0, \pi]$.
      ii. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
      Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$: $x\cos(x) = \sin(x)$, $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ admet une unique solution x_n, et en déduire le signe de g sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ puis les variations de f sur $[n\pi, (n+1)\pi]$.
      Une discussion sur la parité de n intervient.
   (d) Etudier la limite de f en $+\infty$ et préciser la nature de la branche infinie.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 6\pi]$.
2. **Étude des dérivées successives de f sur $\mathbb{R}_+$.**
   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Nous rappelons que pour tout entier naturel n, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f se note $f^{(n)}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction cosinus se note donc $\cos^{(n)}$.
   (b) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u.$$
   (c) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, calculer : $\dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u$.
   L'expression attendue dépend de cos$^{(n)}(0)$, valeur que vous ne chercherez ni à évaluer, ni à simplifier.
   (d) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, montrer que :
   $$\left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \left| \cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0) \right| \mathrm{d}u.$$
   (e) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que :
   $$\forall u \in \mathbb{R}_+\,,\ \left| \cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0) \right| \leq u.$$
   (f) En déduire que pour tout entier naturel n :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{x}{n+2}.$$
   (g) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}$.
   (h) En utilisant le théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction f' entre 0 et $x > 0$, montrer que f est deux fois dérivable en 0 et que : $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

(i) Montrer que pour tout entier naturel n, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$ et préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Nous avons donc montré que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. **Expression des dérivées successives de f sur $\mathbb{R}_+^*$.**

(a) Montrer que pour tout entier naturel k : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(b) Considérons la fonction inverse $b : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Montrer que pour tout entier naturel k : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ b^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

(c) On donne la formule de Leibnitz : Soit g et h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I.
Alors gh est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et

$$\forall x \in I\,,\ (gh)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k}(n-k)! \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) x^k.$$

(d) Soit k appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$.
Exprimer $\sin^{(2k)}(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et de k, puis $\sin^{(2k+1)}(x)$ en fonction de $\cos(x)$ et de k.

(e) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel strictement positif x :

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}} \left(\sin(x) \sum_{0 \le 2k \le n} \frac{(-1)^{n-k} x^{2k}}{(2k)!} + \cos(x) \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \frac{(-1)^{n-k-1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right).$$