Exercices : Séries

Exercice 1 : Nature et somme de séries
Dans chaque cas déterminer si la série est convergente et calculer sa somme lorsque c'est possible.

1. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$
2. $\sum_{n\geq 1} (1-\frac{1}{n})^n$
3. $\sum_{n\geq 1} n^2 e^{-4n}$
4. $\sum_{n\geq 0} \frac{2n(n+1)}{3^n}$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$
6. $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n!}$
7. $\sum_{n\geq 0} \cos(\frac{1}{n})$
8. $\sum_{n\geq 0} \frac{3n+1}{4^n n!}$
9. $\sum_{n\geq 0} \ln(1-\frac{1}{n^2})$

Exercice 2 : Natures de séries Dans chaque cas, préciser la nature de la série.

1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{4^n}$
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+5}$
4. $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n^2})$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2+n^2\sin n}$

Exercice 3 : Série télescopique

1. Soit $n \geq 0$, simplifier $\arctan(n+1) - \arctan(n)$.

2. En déduire la nature et la somme en cas de convergence de la série :

$$\sum_{n\geq 0} \arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$$

Exercice 4 : Équivalent d'une somme partielle

On considère les séries dites de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel.

1. Montrer que si $\alpha \neq 2$, la série converge.
2. Montrer que si $\alpha \leq 1$ la série diverge.
3. On s'intéresse au cas $1 < \alpha < 2$.
   (a) Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :
   $$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} dt$$
   (c) Conclure sur la convergence de la série de Riemann dans ce cas.

Exercice 5 : série et suite récurrente linéaire d'ordre 2
On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = \frac{1}{6} u_{n+1} + \frac{1}{18} u_n$$

Étudier la nature et la somme en cas de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 6 : Manipulations sur les séries

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, étudier la nature et la somme en cas de convergence des deux séries suivantes : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, étudier la nature et la somme en cas de convergence des deux séries suivantes : $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n\theta)}{n!}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n\theta)}{n!}$

Exercice 7 : Série dont le terme général est une suite définie par récurrence
On considère la suite u définie par

$$u_0 \in [0; \frac{\pi}{2}] \quad et \quad \forall n \geq 0, u_{n+1} = 1 - \cos(u_n)$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite u est convergente et déterminer sa limite.
3. Montrer que $\forall x \geq 0, \quad 1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$.
4. Justifier que ${u_n}^2 \leq u_n, \forall n \geq 1$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n\leq 0} u_n$.

Exercice 8 : Calcul d'une somme
Pour $k \in \mathbb{N}*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_{n,k} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{k(n+1)}}{1+t^k} dt, \qquad J_k = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^k}, \qquad u_{n,k} = \frac{(-1)^n}{kn+1}$$

1. On fixe $k \in \mathbb{N}*$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \mid I_{n,k} \mid \leq \frac{1}{1+k(n+1)}$.
   En déduire la limite de la suite $(I_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}*$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, montrer que : $u_{n,k} = \int_0^1 (-t^k)^n dt$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}*$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} u_{j,k} = I_{n,k} - J_k$.
4. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_{n,k}$ converge et déterminer sa somme en fonction de J_k.
5. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}$ pour $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.
   (indication pour $k = 3$: déterminer trois réels a, b, c tel que $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}, \forall t \neq -1$).

Exercice 9 : Convergence de produit

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
   (c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2, \mathrm{e}^2\right]$.
4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
   (a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}$, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.
   (c) Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leq \dfrac{1}{2^n}$.
   (d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.
   (e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq \ell - u_n \leq \dfrac{\ell}{2^n}$.
   (f) Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.