# Exercices : Fonctions

**Exercice 1 : Équations**

Résoudre les équations et inéquations suivantes, après avoir déterminé leur ensemble de définition :

1. $\ln(\frac{x+3}{6}) = \frac{\ln(x)+\ln(4)}{2}$
2. $3e^{3x} + e^{2x} - 2e^{x} = 0$
3. $(x+2)(3x+1) \leq (x+2)(x^2+2x-5)$
4. $\sqrt{x^2+1} - x \leq \frac{1}{2}$
5. $\tan(4x)\tan(x) = 1$
6. $\sin(2x) + \cos(x) = 0$
7. $\cos(2x) - \cos(x) + 1 \leq 0$
8. $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$

**Exercice 2 : Calculs de limites**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-x+3}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)} - \sqrt{1-\sin(x)}}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(e^x - x)}{x^2+1}$
5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-4}{x^2-x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(x)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x^2}} - x$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{1}{x^2})^x$

**Exercice 3 : Équivalents**

Déterminer les équivalents suivants :

1. $x\ln(1+x^2) - 2x\ln(x)$ en $+\infty$
2. $\frac{\sin(2x)}{\cos(x^2)-1}$ en 0
3. $\sqrt{4x^2-5x} - 2x$ en $+\infty$
4. $\frac{e^x-e}{x-1}$ en 1.

**Exercice 4 : Suite implicite**

Soit $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$

1. Montrer que $f$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possèdent deux solutions notées $x_n$ et $y_n$, avec $0 < x_n < 1 < y_n$.
3. Etudier le comportement des suites $(x_n)$ et $(y_n)$.

**Exercice 5 : Études de fonctions**

On pose $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2-4x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Dresser son tableau de variations.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f$ en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. Etudier les branches infinies de la courbe de $f$.
5. Tracer l'allure de la courbe de $f$.

**Exercice 6 : Fonctions trigonométriques réciproques**

1. Calculer les nombres suivants : $\arcsin(-\frac{1}{2})$, $\arctan(\tan -\frac{7\pi}{5})$.
2. Montrer que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
3. On définit $f$ par $f(x) = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x}{\sqrt{(x-1)^2+1}})$
   (a) déterminer l'ensemble de définition de $f$.
   (b) Calculer $f'$
   (c) En déduire une expression plus simple de $f$.

**Exercice 7 : Inégalités classiques**

Démontrer les inégalités ou encadrements suivants :

1. $\forall x \in ]-1;+\infty[, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) \leq x$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$

**Exercice 8 : Développements limités**
Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\ln(\sqrt{1+x}) - e^{2+x}$
2. $DL_4(0)$ de $\frac{\cos(x)}{2+x}$
3. $DL_3(0)$ de $\ln(3e^x + e^{-x})$
4. $DL_3(1)$ de $x^{\frac{1}{1-x}}$
5. $DL_4(0)$ de $e^{\cos(x)}$
6. $DL_2(0)$ de $\ln(1 + x + \sqrt{4+x})$
7. $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(2+x)}{(1+x)^3}$
8. $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $\sin(x)$

**Exercice 9 : théorèmes de Rolle**
Soit $f$ une fonction de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\forall x > 0, f(x+1) = xf(x) \text{ et } f''(x) > 0$$

1. Montrer que s'il existe $c > 0$ tel que $f(c) = 0$ alors il existe $a \in ]c; c+1[$ et $b \in ]c+1; c+2[$ tels que $f'(a) = f'(b) = 0$.
   En déduire que $f$ est de signe constant.
2. Montrer que $f'$ est strictement croissante et s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel noté $\epsilon$ appartenant à $]1; 2[$.
3. Pour $n \geq 2$, exprimer $f(n)$ en fonction de $n$ et $f(2)$.

4. Quelle est la limite de $f$ en $+\infty$ ?
5. Donner un équivalent de $f$ en 0.
6. Dresser le tableau de variations de $f$.

**Exercice 10 : théorèmes des accroissements finis**

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + 1 - \ln(x)$ et la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $f([2;3]) \subset [2;3]$. Que peut-on en déduire sur $(u_n)$ ?
   (b) Montrer que $\forall x \in [2;3], |\ f(x) - e\ | \leq \frac{2}{3}|x - e\ |$.
   (c) Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
   (d) Écrire une fonction en Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $e$ avec une erreur précisée en argument de la fonction.

**Exercice 11 : Primitive**

Déterminer une primitives des fonctions suivantes :

1. $\cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$
2. $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. $\frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$ sur $\mathbb{R}$
4. $\frac{1}{x^5}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
5. $x^2 \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. $(x^2 + 2)\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$
7. $\frac{x+3}{x^2+x-2}$ sur $]1; +\infty$
8. $\cos(\ln(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (en posant $t = \ln(x)$)
9. $t^2\sqrt{1-t^2}$ sur $[0, 1]$ (en posant $t = \sin(u)$)

**Exercice 12 : Suites définies par une intégrale**

1. Pour tout entier $n$ on note $f_n$ la fonction définie sur [0,1] par :

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

   (a) i. Montrer que $f_n$est dérivable sur [0,1].
   ii. Etudier le sens de variation de $f_n$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel $c_n$ de [0,1] tel que :

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$$

   et donner la valeur de $c_0$.
   (c) On considère la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ définie à la question précédente ; montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite $\ell$ appartenant à $[0, 1]$.
   (d) i. Montrer que pour tout nombre réel fixé $r$ de $]0, 1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty$$

   (On pourra prouver que $e^x \geq x$)

ii. Montrer que pour tout entier naturel $n$ on a

$$\int_{c_n}^{1} e^{-nt^2} dt \leq 1.$$

iii. En déduire la valeur de $\ell$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{5 + 4\cos(t)} dt$
   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq 2\pi$. Calculer $I_1 + \frac{5}{4} I_0$.
   (b) Déterminer une constante $a$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} + I_n = aI_{n+1}$.
   (c) Donner la valeur de $I_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et de $I_0$. Calculer alors $I_n$ en fonction de $n$ (penser à passer aux limites).

**Exercice 13 : Fonction définie par une intégrale**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 2 \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt$.

1. Préciser l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est dérivable sur son ensemble de définition et donner $f'(x)$. En déduire une expression plus simple de $f$.
3. Retrouver ce résultat en effectuant le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale.