Exercices : Suites

Exercice 1 : Détermination du terme général d'une suite
Déterminer le terme général des suites définies par :

1. $u_0 = 2, u_{n+1} = 2u_n - 8, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $u_0 = 3, u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n, \forall n \in \mathbb{N}$
3. $u_0 = 1, u_{n+1} = e^5 u_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$ (on pourra utiliser une suite auxiliaire après avoir justifier son existence)
4. $u_0 = 2, u_{n+1} = u_n + (-3)^n + 2n, \forall n \in \mathbb{N}$
5. $u_0 = 1, u_1 = 2, u_{n+2} = 4u_{n+1} + \alpha u_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$)
6. $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 : Changement de suite
On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 2}{u_n + 2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n > 1, \forall n \geq 3$.
   On définit alors la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et qu'elle est géométrique.
3. Déterminer l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de (u_n).
5. Écrire un programme en Python qui reçoit en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de (u_n). Vérifier le résultat de la question précédente.

Exercice 3 : limite de suite
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + n + 1}{n \ln(n)}$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + (-4)^n}{3^n}$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n^2 - 5} - \sqrt{2n + 3}$
5. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^6 - ln(n)}{e^n - (-1)^n}$
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n}$
7. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3n + 2}{3n - 4}\right)^{6n}$
8. $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2^k}}$
9. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n^2}{n^2 + k^2}$

Exercice 4 : Suite implicite
Soit $n \in \mathbb{N}*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n e^{-x} - 1$.

1. Etudier les variations de f_n. En déduire que pour tout entier supérieur à 3, l'équation $e^x = x^n$ admet une unique solution, notée, x_n, dans l'intervalle $[0; n]$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, $x_n > 1$
3. En étudiant le signe de $f_{n+1}(x_n)$, déterminer le sens de variation de (x_n).
4. Conclure sur la convergence de (x_n)
5. On note l la limite de (x_n). Montrer que $\ln(x_n) = \frac{x_n}{n}$ et en déduire la valeur de l.
6. Donner un équivalent de $\ln(x_n)$ puis de $x_n - 1$.

Exercice 5 : Étude de suites récurrentes

1. Étudier la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$, après avoir émis des conjectures à l'aide de la calculatrice.
2. Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3 + e^{-u_n}$, après avoir émis des conjectures à l'aide de Python.

Exercice 6 : Encadrement d'une somme partielle

1. Montrer que : $\forall k \geq 2, \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}$
2. On pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}, \forall n \geq 2$
   (a) Déterminer la limite et un équivalent de la suite (v_n).

Exercice 7 : Série alternée

On définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge. (on pourra étudier les suites extraites des termes d'ordre pair et impair)
2. Calculer, pour $k \geq 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$.
3. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 8 : Suites couplées

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 > 0, v_0 > 0$, $u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{u_n+v_n}, v_{n+1} = \frac{{v_n}^2}{u_n+v_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies et strictement positives.
2. Montrer que ces deux suites convergent.
3. Déterminer leurs limites. (on pourra étudier $u_{n+1} - v_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$).
4. Déterminer le terme général de (u_n) et (v_n) en fonction de n, u_0 et v_0. (on pourra étudier $\frac{u_n}{v_n}, \forall n \in \mathbb{N}$).

Exercice 9 : Vitesse de convergence
On définit (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}(u_n - \sqrt{2})$
2. En déduire que $\mid u_{n+1} - \sqrt{2} \mid \leq \mid 1 - \sqrt{2} \mid \times \mid u_n - \sqrt{2} \mid$
3. En déduire que (u_n) converge et sa limite.

Exercice 10 : Équivalents

1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ pour les suites définies par :
   (a) $u_n = e^n - 3^n + \ln(n)$
   (b) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$
   (c) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ est équivalente à $(n!)$.
3. On étudie la suite (S_n) de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $\forall t \in]-1; +\infty[, \ln(1+t) \leq t$.
   (b) En déduire que $\forall t \in]-1; +\infty[, \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t)$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.
   (d) Déterminer un équivalent de S_n
   (e) On définit (u_n) par $u_n = S_n - \ln(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (u_n) converge (sa limite s'appelle la constante d'Euler, notée γ).

Problème

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$
   (a) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer le tableau de variations de f.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$$
   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f\left(\dfrac{1}{p}\right) \leq \dfrac{1}{p+1}$
   (b) En déduire par récurrence que pour tout entier n, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
   (d) Vérifier que : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$

(e) En déduire par récurrence et à l'aide du 2.b) que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3. (a) Montrer que pour tout rérl $x \geq 2$, $\dfrac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1)$

(b) En déduire que : pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$

puis que : pour tout entier $n \geq 2$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$

(c) A l'aide des résultats précédents, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \cdot u_n$.