Chapitre 2 Fonctions réelles

I. Fonctions d'une variable

1.1 Fonction d'une variable à valeurs réels

Définition : Une fonction f d'une variable réelle à valeur réelle est un procédé qui associe à toute valeur x d'un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ une unique valeur, notée $f(x)$, dans $\mathbb{R}$.

D_f est appelé ensemble de définition de f.

Pour tout x dans D_f, $f(x)$ est appelée l'image de x par la fonction f.

L'ensemble des valeurs atteintes par f, noté $f(D_f)$) est appelé ensemble image de f.

Si y est un élément de l'ensemble image de f et si x est un élément de D_f qui vérifie $f(x) = y$, alors on dit que x est un antécédent de y par f. On note $f^{-1}(\{y\})$ l'ensemble des antécédents de y.

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition : Soit f une fonction d'une variable réelle à valeur réelle. Soit P un plan munie d'un repère orthonormé. On appelle graphe de f dans le plan P (ou représentation graphique de f), l'ensemble des points du plan P de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque l'on fait varier x dans D_f.

Définition : Soit f et g deux fonctions d'une variables réelles. On dit que $f = g$ si les deux fonctions sont définies sur le même ensemble D et si $f(x) = g(x), \forall x \in D$.

1.2 Fonctions usuelles

Définition : La fonction identité est la fonction définie par $f : x \mapsto x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}$.

Définition : La fonction valeur absolue est la fonction définie par

$$| \cdot |: x \mapsto | x |= \begin{cases} -x \text{ si x est négatif} \\ x, \text{si x est positif} \end{cases}$$

Elle est définie sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{R}_+$.

Définition : La fonction partie entière, notée $\lfloor \cdot \rfloor$, est la fonction qui à un réel associe le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel.

Définition : Soient a et b deux réels. Une fonction f définie par $f(x) = ax + b$ pour tout x réel est une fonction affine.

Définition : Soient n un entier naturel, $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $n+1$ réels. Alors la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour tout x réel est une fonction polynomiale.

Définition : f est une fonction rationnelle si elle est le quotient de deux fonctions polynomiales. Elle est définie pour l'ensemble des réels qui n'annule pas le dénominateur.

Définition : Le logarithme népérien est l'unique primitive de la fonction inverse, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui s'annule en 1. On la note ln.

Propriété :

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln(xy) = ln(x) + ln(y)$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^n) = n \ln(x)$

Définition : Le logarithme décimal, noté log, est définie par $log : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(10)}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition : La fonction exponentielle, notée exp ou e, est la réciproque de la fonction ln.

Propriété :

1. $e^0 = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, e^{x+y} = e^x e^y$ et $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction exponentielle de base a est définie sur $\mathbb{R}$ par
$x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$.

Propriété :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$
2. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha$
3. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

Définition : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction "puissance α" est la fonction qui à x réel strictement positif associe $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

Définition : P : plan muni d'un repère orthonormé orienté. C : cercle trigonométrique. A : point de coordonnée $(1, 0)$. T : tangente au cercle en A

Si $x \in \mathbb{R}$, on peut associer un unique point M à x C :l'arc de cercle AM a pour longueur $\mid x \mid$ (parcours dans sens direct si $x \geq 0$ dans le sens indirect sinon).

$\cos(x)$ est la valeur de l'abscisse du point M, $\sin(x)$ est la valeur de l'ordonnée de x $\tan(x)$ est l'ordonnée du point d'intersection de T et de la droite OM (quand il existe).

Propriété :

1. $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
2. $\cos(0) = 1$; $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(0) = 0$; $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$; $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; $\tan(0) = 0$; $\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$; $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$; $\tan(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}$.

3. $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$; $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$; $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$; $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$; $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$; $\cos(-x) = \cos(x)$; $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Propriété : Soient a et b deux nombres réels.

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$
3. $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
4. $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
5. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
6. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
7. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
8. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
9. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - cos(a+b)]$

Définition : $x \in [-1;1]$. $\arcsin(x)$ est l'unique réel dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\arcsin(x)) = x$.
$x \in [-1;1]$. $\arccos(x)$ est l'unique réel dans $[0;\pi]$ tel que $\cos(\arccos(x)) = x$.
$x \in \mathbb{R}$. $\arctan(x)$ est l'unique réel dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tel que $\tan(\arctan(x)) = x$.

Propriété : $\forall (x,y) \in [-1;1] \times [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]; y = arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$.
$\forall (x,y) \in [-1;1] \times [0;\pi]; y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y)$.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]; y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$.

1.3 Propriété des fonctions d'une variable réelle

Dans ce paragraphe, D est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition : Soient f et g deux fonctions définies sur D et λ un réel.

- Le produit de f par λ est la fonction notée λf et définie par $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x), \forall x \in D$.
- La somme de f et g est la fonction notée $f+g$ et définie par $f+g : x \mapsto f(x)+g(x), \forall x \in D$.
- Le produit de f et g est la fonction notée fg et définie par $fg : x \mapsto f(x)g(x), \forall x \in D$.
- Si g ne s'annule pas sur D. Le quotient de f par g est la fonction notée $\frac{f}{g}$ et définiepar $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}, \forall x \in D$.

Définition : f définie sur D_f et g définie sur D_g. OSQ $f(D_f) \subset D_g$.
L'application $g \circ f$, appelée composée de f par g, est définie par $g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in D_f$.

Définition : f définie sur $D_f \subset \mathbb{R}$ est une fonction bijective si il existe une fonction g définie sur $D_g = f(D_f)$ telle que :
$f \circ g(x) = x, \forall x \in D_g$ et $g \circ f(x) = x, \forall x \in D_f$.
g est la réciproque de f, notée f^{-1}.

Définition : On dit que f est paire (resp. impaire) si :

1. D_f est symétrique par rapport à : $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$.
2. $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)(resp. f(-x) = -f(x)$.

Définition : Soit t un réel non nul, f définie sur D est t-périodique si :

1. $\forall x \in D_f, x - t \in D_f$ et $x + t \in D_f$.
2. $\forall x \in D_f, f(x+t) = f(x)$.

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f et soit I un intervalle inclus dans D_f.

1. On dit que f est croissante sur I (resp. strictement croissante sur I) lorsque f conserve le sens des inégalités :
   $\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, (resp. $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).
2. On dit que f est décroissante sur I (resp. strictement décroissante sur I) lorsque f inverse le sens des inégalités :
   $\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, (resp. $\forall (x,y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$)
3. On dit que f est constante sur I lorsque : $\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) = f(y)$

Définition : Si f est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I, f est (strictement) monotone sur I.

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur I et λ un réel.

1. Si λ est positif λf a le même sens de variation que f.
2. Si λ est négatif λf a le sens de variation contraire à celui de f.
3. Si f et g ont le même sens de variation $f + g$ a également le même sens de varaition.

Propriété : Soit f et g deux fonctions définies sur des intervalles I et J respectivement. On suppose $f(I) \subset J$.

1. Si f et g ont le même sens de variation sur I et J alors $g \circ f$ est croissante.
2. Si f et g ont des sens de variations contraires sur I et J alors $g \circ f$ est décroissante.

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f et I un sous ensemble de I.

1. On dit que f est majorée (resp. minorée) sur I lorsque :
   $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$, (resp $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq M$
2. On dit que f est bornée sur I lorsque f est à la fois majorée et minorée sur I.

Propriété : Si f est bornée sur I, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in I, \mid f(x) \mid \leq k$.

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f.

1. On dit que f admet un minimum (resp. un maximum) global en x_0 lorsque $x_0 \in D_f$ et
   $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(x_0)$, (resp.$\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$
   Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est le minimum (resp.le maximum) de f sur D_f.

2. On dit que f admet un minimum (resp. un maximum) local en x_0 lorsque
$\exists \epsilon, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$, (resp $\exists \epsilon, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \epsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$).

Définition : On dit qu'une fonction f admet un extremum (global ou local) lorsqu'elle admet un maximum ou un minimum (global ou local).

III. Limites de fonctions

f et g sont deux fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles et on note D_f et D_g leur ensemble de définition.

3.1 Définitions

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de a s'il existe un intervalle I contenant a, non réduit à un point, tel que $I \setminus \{a\} \subset D_f$.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. Soit l un réel.
On dit que f a pour limite l en a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \varepsilon$
on note alors $l = \lim\limits_{a} f$ ou $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. Soit l un réel.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \mid f(x) - l \mid = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - l) = 0$

Définition : On dit que f admet une limite finie en a si il existe un réel l tel que f a pour limite l en a.

Définition : Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si $\forall K > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, \mid x - a \mid \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq K$
Dans ce cas, on note $\lim\limits_{a} f = +\infty$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de a. l est soit un nombre soit $+\infty$ soit $-\infty$. La fonction f admet l pour limite à droite (resp. à gauche) en a si la restriction de f à $D_f \cap]a; +\infty[$ (resp $D_f \cap]-\infty; a[$) a pour limite l en a. On note $\lim\limits_{a^+} f = l$ (resp $\lim\limits_{a^-} f = l$).

Propriété : Soit a un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de a.
On suppose qu'il existe un voisinage ouvert de a inclus dans D_f.

1. Si a n'appartient pas à D_f et si l désigne soit un nombre réel soit $+\infty$ soit $-\infty$ on a : $\lim\limits_{a} f = l \Leftrightarrow \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = l$
2. Si a appartient à D_f, on a : $\lim\limits_{a} f = f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = f(a)$

Définition : Soit f une fonction définie sur D_f. On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$ s'il existe un réel α tel que $[\alpha; +\infty[\subset D_f$ (resp. $[+\infty; \alpha[\subset D_f$).

Définition : Soit l un réel. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que f a pour limite l en $+\infty$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} x \geq A \Rightarrow \mid f(x) - l \mid \leq \varepsilon$

On note $\lim\limits_{+\infty} f = l$

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $\forall K > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f, x \geq A \Rightarrow f(x) \geq K$

On note $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

3.2 Propriétés des limites

Propriété : Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si f admet une limite finie en a, cette limite est unique.

Propriété : Soient a un réel fini ou $+\infty$ ou $-\infty$ et f une fonction définie au voisinage de a et possédant une limite finie en a. Alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$ et f une fonction possédant une limite finie l non nulle au voisinage de a. Alors f garde le signe de l et ne s'annule pas au voisinage de a.

Propriété : Soient f une fonction définie sur D, (u_n) une suite d'éléments de D, a une réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x_0$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = l$.

Propriété : Soient a et l deux éléments qui peuvent être des réels finis, $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et au voisinage de a. La fonction f a pour limite l en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de D de limite a, la suite $f(u_n)$ a pour limite l.

Définition : Soit a un nombre réel et f une fonction définie au voisinage de a. Si f admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f en a.

Définition : Soit b un nombre réel. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). On dit que la droite d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).

Définition : Soient a et b deux nombres réels, tels que $a \neq 0$. Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$). On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$).

Propriété : a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont deux fonctions définies au voisinage de a. Soit λ, l, l' trois réels.

1. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = 0$.
2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et si g est bornée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x \to a} f.g(x) = 0$.
3. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$.
   (a) $\lim\limits_{x \to a} f + g(x) = l + l'$

(b) $\lim_{x \to a} f.g(x) = ll'$

(c) $\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda l$

(d) Si $l' \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont définies au voisinage de a et $\lim_{x \to a} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{l'}$ et $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$.

Propriété : Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.

1. Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée au voisinage de a alors $\lim_{x \to a} f + g(x) = +\infty$
2. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et si g est minorée par une constante strictement positive au voisinage de a alors $\lim_{x \to a} f.g(x) = +\infty$.
3. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ et si g admet une limite finie non nulle ou tend vers l'infini alors fg a pour limite $\pm\infty$ le signe étant déterminé par les règles des signes.
4. Si f tend vers $\pm\infty$ en a alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et a pour limite 0 en a.
5. Si f tend vers 0 en a et si f est strictement positive (resp.strictement négative) au voisinage de a alors $\frac{1}{f}$ tend vers $+\infty$ (resp.$-\infty$).

Formes indéterminées :

— la somme de deux fonction l'une tendant vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$.
— Le produit de deux fonctions, l'une tendant vers 0 et l'autre vers l'infini.
— le quotient de deux fonctions tendant vers 0, le quotient de deux fonctions tendant vers l'infini.

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Soit f une fonction définie au voisinage de a et qui admet l pour limite en a. Soit g une fonction définie au voisinage de l et qui a pour limite l' en l. Alors $g \circ f$ a pour limite l' en a.

3.3 Limites et inégalités

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D. on suppose que $f \leq g$ au voisinage de a.

1. Si f et g ont des limites finies en a alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.
2. Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.
3. Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Propriété : Soit a un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a. On suppose que f et h ont la même limite finie, l, au voisinage de a et que $f \leq g \leq h$ au voisinage de a. Alors g admet une limite finie en a et $\lim_{x \to a} g(x) = a$.

Propriété : Soit f une fonction définie et croissante sur l'intervalle $I =]a; b[$ (avec $a < b$ deux réels). Alors f possède une limite (finie ou infinie) en a et en b. Si f est majorée, la limite en b est finie et égale à la borne supérieur de f. Si f est minorée, la limite en a est finie et égale à la bornée inférieure de f.

3.4 Comparaison de fonctions

Propriété : Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

1. $\lim_{x \to 0^+} x^a (\ln(x))^b = 0$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0$
3. $\lim_{x \to +\infty} x^a e^{-bx} = 0$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \infty$. f et g sont définies au voisinage de a.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a et une fonction φ définie sur $D \cap V$ telle que

$$\forall x \in V \cap D f(x) = g(x)\varphi(x) et \lim_{x \to a} \varphi(x) = 1$$

Dans ce cas, on note $f(x) \sim_{x \to a} (g(x))$ ou $f \sim_a (g)$.

Propriété : Soit a un réel ou $\pm\infty$. Si f est équivalente à g au voisinage de a alors g est équivalente à f au voisinage de a et on dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a.

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$. f et g sont définies au voisinage de a. Si $a \in D$ on suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

On suppose qu'il existe un voisinage I de a tel que g ne s'annule pas sur $D \cap I \setminus \{a\}$. Alors :

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Propriété : Soient f une fonction définie sur un ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et $a \in D_f$. Si la fonction f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors au voisinage de a, on a $f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a)$.

Propriété : Au voisinage de 0 on a : $\sin(x) \sim x$; $\tan(x) \sim x$; $\ln(1 + x) \sim x$ et pour $a \neq 0, (1 + x)^a - 1 \sim ax$, $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$

Au voisinage de 1, on a $\ln(x) \sim x - 1$

Propriété : (FI classique) $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Propriété : Soit a un réel ou $\pm\infty$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.

1. Si l'une possède une limite finie ou infinie en a alors l'autre possède la même limite en a.
2. Si f ne s'annule pas au voisinage de a alors g ne s'annule pas au voisinage de a.
3. Si f est strictement positive (resp. strictement négative) au voisinage de a alors g est strictement positive (resp. strictement négative) au voisinage de a.

Propriété : On considère des fonctions définies au voisinage de a, a étant un réel ou $\pm\infty$. Les équivalences sont données au voisinage de a.

1. Si $f \sim g$ et si $g \sim h$ alors $f \sim h$.
2. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.
3. Si $f \sim g$ et si $n \in \mathbb{N}$ alors $f^n \sim g^n$.
4. Si $f \sim g$ et s'il existe un voisinage I de a tel que g ne s'annule pas sur $D \cap I \setminus \{a\}$ alors $\frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}$

IV. Continuité

4.1 Définitions

f est une fonction réelle à valeurs réelles définie sur D_f.

Définition : Soit $a \in D_f$. On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Définition : Soit $D_f = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I est noté $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$.

Définition : Soit $a \in D_f$. On dit que la fonction f est continue à gauche (respectivement à droite) en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$).

Propriété : Soit a un réel qui n'appartient pas à D_f. On suppose que f possède une limite finie l en a. Soit g la fonction définie sur $D_f \cup a$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in D_f$ et $g(a) = l$. Alors g est un prolongement de f, continue en a. On l'appelle prolongement par continuité de f en a.

Définition : Soit a un réel qui n'appartient pas à D_f. On dit que f est prolongeable par continuité à droite en a si f admet une limite finie à droite en a. On dit que f est prolongeable par continuité à gauche en a si f admet une limite finie à gauche en a.

4.2 Propriétés

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D, a un élément de D et λ un réel quelconque. Si f et g sont continues en a alors $f+g$, fg et λf sont continues en a. De plus si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en a.

Propriété : Soient f et g deux fonctions telles que $D_g \subset D_f$ et a un élément de D_f. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Propriété : Soit $a \in D_f$. On suppose que f est définie au voisinage de a. Si f est continue en a, alors pour toute suite (u_n) de D_f convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.

Propriété : (théorème des valeurs intermédiaires) Soient a et b deux réels avec $a < b$. Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(x) = k$.

Propriété : Si f est continue sur un intervalle I non réduit à un point et si f change de signe sur I alors f s'annule sur I.

Propriété : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Définition : Un segment est un intervalle fermé borné.

Propriété : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornées (c'est à dire possède un maximum et un minimum).

Propriété : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Propriété : (théorème de la bijection) Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

La bijection réciproque de f est elle aussi monotone, de même sens de variation et est continue sur $f(I)$.

V. Dérivabilité

Définition : Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie sur un ensemble D_f. Soit a un élément de D_f.

On dit que la fonction f est dérivable en a si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a. Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Propriété : (dérivées usuelles)

$f(x)$	$f'(x)$	I
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^n, $n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sinon
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
a^x, $a > 0$	$\ln(a) \times a^x$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$ ou $\frac{1}{cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Propriété : : La tangente T à la courbe C de f lorsque f est dérivable en x_0 admet pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Propriété : Si la fonction f est dérivable en a, elle est continue en a.

Définition : La fonction f est dérivable sur I si f est définie sur I et dérivable en tout point $a \in I$.

On appelle alors fonction dérivée de f et on note f' ou $\frac{df}{dx}$ la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivée de f en x, $f'(x)$.

Définition : Soient f une fonction définie sur un ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et $a \in D_f$. On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a si la restriction de f à $[a; +\infty[$ (resp. à $]-\infty; x_0]$) est dérivable en a. On note alors $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) cette dérivée.

Propriété : Soient f une fonction définie sur un ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et $a \in D_f$. On suppose que D_f contient un intervalle ouvert contenant a. Alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Propriété : Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et λ un réel.

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
4. si de plus $g(a) \neq 0$, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables en a et $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{(g(a)^2)}$ et $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a)^2)}$

Propriété : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J. On suppose $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Propriété : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur I. Soit a un élément de I qui n'est pas une extrémité. Si f possède un extremum local en c alors $f'(c) = 0$.

Propriété : (théorème de Rolle) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Propriété : (Formule des accroissements finis) Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur l'intervalle $[a; b]$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$. Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. La fonction f est croissante sur I si seulement si f' est positive ou nulle.
2. La fonction f est décroissante sur I si seulement si f' est négative ou nulle.
3. La fonction f est constante sur I si seulement si f' est nulle.

Propriété : Si f est une fonction dérivable sur I et si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Définition : Soit I un intervalle non réduit à un point et f une fonction définie sur I. On définit par récurrence la dérivée n-eme de f, notée $f^{(n)}$. On pose $f^{[0)} = f$. f est n fois dérivable si elle est $n-1$ fois dérivable et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I. On pose alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition : Soit f une fonction définie sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I où que f est n fois continument dérivable sur I, si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois continument dérivables sur I.

Définition : Si pout tout entier naturel n la fonction f est dérivable, on dit que f est indéfiniment dérivable ou de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

Propriété : Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I) et si λ est un réel alors :

1. $f+g$ est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I) et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.
2. λf est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I) et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.
3. fg et n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I).
4. si de plus f ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{f}$ est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$ sur I).

Propriété : Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, f une fonction définie sur I, g une fonction définie sur J, telles que $f(I) \subset J$. Si f et g sont n fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^n$)), alors $g \circ f$ est n fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^n$)

VI. Intégration sur un segment

Propriété : (admis) Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Définition : Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$ avec a et b deux réels. Soit F une primitive de f sur cet intervalle. On appelle intégrale de f de a à b le réel $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur I. Soit a et b deux réels appartenant à I. On a : $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_a^b f'(t)dt$.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout $a \in I$ la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Propriété : (linéarité de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et λ et μ deux réels. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$

Propriété : (relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois réels de I. $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

Propriété : (positivité de l'intégrale) Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ (avec $a < b$). $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Propriété : (croissance de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ (avec $a < b$) telles que $f(t) \leq g(t) \forall t \in [a;b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Propriété : Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$). $\displaystyle\mid \int_a^b f(t)dt \mid \leq \int_a^b \mid f(t) \mid dt$

Propriété : (inégalité de la moyenne) Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$ (avec $a < b$). $\displaystyle min(f;[a;b]) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq max(f;[a;b])$

Propriété : (Intégration par parties) Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$. $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Propriété : (Changement de variables) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit f une continue sur I et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors, pour tout a, b dans J, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$

Propriété : Si f est une fonction continue et paire sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_0^x f(t)dt$

Si f est une fonction continue et impaire sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = 0$

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

Propriété : (admis) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout a et b dans I tels que $a < b$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ désigne l'aire algébrique du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Propriété : (Somme de Riemann) Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ (avec $a < b$).
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt$

Définition : Soit $a < b$ deux réels. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a;b]$ si f est continue en tout point de $[a;b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f admet une limite finie à gauche et à droite et si f admet une limite finie à droite en a et à gauche en b.

Autrement dit f est continue sur $[a;b]$ s'il existe des réels $x_0 < x_1 < ... < x_n$ tels que :
— $x_0 = a$ et $x_n = b$.

— Pour tout $k \in [|0;n-1|]$, f est continue sur $]x_k;x_{k+1}[$ et admet un prolongement par continuité sur $]x_k;x_{k+1}[$.

la famille $(x_0, x_1, ..., x_n)$ est appelée subdivision adaptée à f.

On note $\mathcal{C}([a;b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$.

Définition : Soient $a < b$ deux réels. Soient f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et $(x_0, x_1, ..., x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $k \in [|0;n-1|]$, on note f_k la fonction continue sur $[x_k;x_{k+1}]$ qui prolonge la restriction de f à $]x_k;x_{k+1}[$. alors l'intégrale de f de a à b est le réel : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt$

VII. Développements limités

Définition : : Soit f une fonctions définie au voisinage de 0. On dit que f est négligeable devant x^n en 0 si il existe une fonction ϵ définie au voisinage de 0 telle que : $f(x) = \epsilon(x)x^n$ au voisinage de 0 et $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. On note alors $f(x) = o(x^n)$.

Propriété : f est négligeable devant x^n au voisinage de 0 ssi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n} = 0$.

Définition : Soit f une fonction définie en au voisinage de 0. Soit n un entier naturel. On dit que la fonction f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe $n+1$ réels $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tel que, au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

Définition : Soit f une fonction définie en au voisinage de x_0. Soit n un entier naturel. On dit que la fonction f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe $n+1$ réels $(a_0, a_1, ..., a_n)$ tel que, au voisinage de 0, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$

Propriété : Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 alors elle admet un développement limité d'ordre p en 0 pour tout $p \in [|0;n|]$.

Propriété :

1. Une fonction f possède un développement limité en 0 d'ordre 0 si et seulement si elle est possède une limite en 0. Si f n'est pas définie en 0, elle est prolongeable par continuité en 0.
2. Une fonction f possède un développement limité d'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en 0. Si f n'est pas définie en 0, elle est prolongeable en une fonction dérivable en 0.

Propriété : Soit f une fonction qui possède un Dl d'ordre n au voisinage de 0. Soient $(a_0, ..., a_n)$ et $(b_0, ..., b_n)$ $2n+2$ réels tels que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$.

Alors $a_k = b_k$ pour tout $k \in [|0;n|]$.

Définition : Si f possède au voisinage de 0 un Dl d'ordre n alors le polynôme dans le développement est unique, on l'appelle partie régulière du développement limité de f en 0.

Propriété : Si $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est la partie régulière du développement de f au voisinage de 0 à l'ordre n alors $\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ est la partie régulière du développement de f à l'ordre p au voisinage de 0 pour tout $p \in [0; n|]$.

Propriété : Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en 0. Alors si f est paire tous les termes d'ordre impair de la partie régulière sont nulles et si f est impaire, tous les termes d'ordre pair de la partie régulière sont nuls.

Propriété : (Taylor Young) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I contenant x_0 alors au voisinage de x_0 : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + ((x - x_0)^n)$

Propriété : Au voisinage de 0 :

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
3. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
4. $(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
5. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$

Propriété : Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie et continue sur I possédant un Dl à l'ordre n au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$. Si F est une primitive de f sur I alors F possède un Dl à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0 et $F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^{n+1})$

Propriété : Au voisinage de 0 : $ln(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Propriété : Soit f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de 0 et admettant au voisinage de 0 un dl d'ordre n de partie réguière P et Q respectivement. Alors $f + g$ admet un dl à l'ordre n au voisinage de 0 de partie entière $P + Q$ et fg admet un dl à l'ordre n au voisinage de 0 de partie entière R où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans le produit PQ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Propriété : Soit f une fonction admettant en 0 un dl à l'ordre n et telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ et soit g une fonction admettant en 0 un dl à l'ordre n. On suppose $f(D_f) \subset D_g$ et on note P et Q les parties régulières respectives de f et g. Alors $g \circ f$ admet au voisinage de 0 un dl d'ordre n de partie régulière R où R est le polynôme obtenu en ne gardant dans $Q \circ P$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Propriété : Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et dont la partie régulière $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est non nulle. Si p est le plus petit indice telle que a_p est non nul alors $f(x) \sim a_p x^p$ au voisinage de 0.

Soit f une fonction qui possède un développement à l'ordre $n > 1$ au voisinage de x_0. Alors f est dérivable en x_0 et admet un développement limité du type $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o(x^p)$ avec $a_p \neq 0$.

On sait que $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$. Une équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$. Le terme suivant dans le développement donne la position de la courbe par rapport à la tangente.

En effet $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ a le signe de $a_p(x - x_0)^p$. Si p est pair, cette quantité est du signe de a_p, sinon, l'expression change de signe en x_0 et la courbe présente un point d'inflexion (c'est à dire, la tangente traverse la courbe).

On pose $X = \frac{1}{x}$ et on recherche un développement limité de $Xf(X)$, au moins à l'ordre 1, sinon plus pour connaître la position de la courbe par rapport à l'asymptote.