

DL 2

Dans ce problème, on s'intéresse à un jeu télévisé dans lequel il s'agit de remporter plusieurs victoires consécutives pour gagner la super cagnotte .

La partie A est consacrée à la démonstration de quelques propriétés de deux séries très classiques. Un cas simple de ce jeu est étudié dans la partie B (indépendante de la partie A). Cette étude, généralisée dans la partie C, amène à étudier des variables aléatoires suivant des lois géométriques puis la somme de ces variables aléatoires.

n désigne un entier naturel non nul. Par ailleurs, on rappelle que

$$0,65 \leq \ln(2) \leq 0,7$$

Partie A : Etude de deux séries réelles

L'objectif de cette partie est d'étudier quelques propriétés des deux séries réelles de termes généraux $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k^2}$ (pour $k \in N^*$). Les sommes partielles sont donc définies par :

$$\forall n \in N^*, A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Rappeler sans justification la nature (convergence ou divergence) de ces deux séries.
2. (a) Enoncer le théorème donnant la formule des accroissements finis (en particulier, on précisera avec soin les hypothèses de ce théorème).
(b) A l'aide de la fonction logarithme népérien, démontrer que :

$$\forall x \in R_+^*, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

- (c) En déduire un encadrement de $\frac{1}{k}$ pour tout $k \in N^* \setminus \{1\}$ puis démontrer que :

$$\forall n \in N^*, \ln(n+1) \leq A_n \leq \ln(n) + 1.$$

- (d) En déduire enfin que :

$$A_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n).$$

3. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in N^* \setminus \{1\}}$ et $(v_n)_{n \in N^* \setminus \{1\}}$ définies par :

$$\forall n \in N^* \setminus \{1\}, \begin{cases} u_n &= A_{n-1} - \ln(n) \\ v_n &= A_n - \ln(n) \end{cases}$$

- (a) Démontrer que $u_4 \geq 0,4$ et $v_4 \leq 0,8$.
- (b) Etudier les sens de variation de $(u_n)_{n \in N^* \setminus \{1\}}$ et $(v_n)_{n \in N^* \setminus \{1\}}$ et démontrer que $(u_n)_{n \in N^* \setminus \{1\}}$ et $(v_n)_{n \in N^* \setminus \{1\}}$ convergent vers un même réel noté ℓ puis déterminer un encadrement de ℓ .
4. (a) Démontrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in R^2$ tel que :

$$\forall k \in N^* \setminus \{1\}, \frac{1}{k(k-1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k-1}.$$

- (b) Démontrer que pour tout $k \in N^* \setminus \{1\}$, $\frac{1}{k(k-1)} \leq \frac{2}{k^2}$ et en déduire que la série de terme général $\frac{1}{k(k-1)}$ est convergente.
- (c) Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ et en déduire que (B_n) est majorée par 2.

Partie B : 3 cadeaux

Lors d'un jeu télévisé, le gagnant de la partie gagne le droit de faire tourner une roue sur laquelle se trouve une bille. La surface de cette roue est découpée en trois zones numérotées de 1 à 3 et ayant chacune la même aire. Lorsque la roue a cessé de tourner, la bille se trouve sur une zone qui rapporte chacune un cadeau différent. Si un candidat gagne plusieurs parties et remporte les trois différents cadeaux, il touche enfin la super cagnotte .

On suppose que les comportements de la roue et de la bille lors d'une victoire sont indépendants des résultats lors des victoires précédentes.

1. (a) Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille à l'issue de la première victoire soit la zone numéro 1?
 (b) Quelle est la probabilité que la zone sur laquelle se trouve la bille à l'issue de la seconde victoire ne soit pas la zone numéro 1?
2. (a) Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur la zone numéro 1 au moins 3 fois en 4 victoires?
 (b) Quelle est la probabilité que la bille se trouve sur deux zones distinctes atteintes exactement deux fois en 4 victoires?
3. Dédurre de ce qui précède que la probabilité que la super cagnotte ait été remportée en (au plus) 4 victoires est égale à $\frac{4}{9}$.

Partie C : n cadeaux

On généralise l'étude de la partie précédente et on considère dorénavant que la surface de la roue est découpée en n zones de même aire. Ces zones sont numérotées de 1 à n .

De même que précédemment, si le candidat gagne les n différents cadeaux, il touche la super cagnotte . De plus, les comportements de la roue et de la bille lors d'une victoire sont toujours indépendants des résultats lors des victoires précédentes.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i - 1$ cadeau(x) différent(s) ayant déjà été gagné(s), on note T_i la variable aléatoire correspondant au nombre de victoire(s) supplémentaire(s) pour gagner un i -ème cadeau différent. Par exemple, si $n \geq 3$ et que les numéros des premières zones atteintes par la bille sont 2, 2, 2, 3, 1 alors :

- T_1 prend la valeur 1 (correspondant à la première victoire).
- T_2 prend la valeur 3 (correspondant aux seconde, troisième et quatrième victoires).
- T_3 prend la valeur 1 (correspondant à la cinquième victoire).

1. (a) Justifier que T_1 suit une loi certaine et que $E(T_1) = 1$.
 (b) Quel est l'ensemble des valeurs prises par T_2 ? Justifier que $P(T_2 > 1) = \frac{1}{n}$.
2. (a) Démontrer que T_i suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
 (b) En déduire que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(T_i) = \frac{n}{n-i+1} \quad \text{et} \quad V(T_i) = \frac{n(i-1)}{(n-i+1)^2}.$$

3. On note S_n la variable aléatoire correspondant au nombre de victoires nécessaires pour remporter la super cagnotte .

- (a) Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{i=1}^n T_i.$$

(b) Dédire de ce qui précède (*cf.* partie A) que $E(S_n) = nA_n$ pour tout $n \in N^*$.

(c) En déduire que $E(S_{16}) \leq 61$.

4. (a) Démontrer par récurrence que les variables aléatoires $(T_i)_{i \in [[1, n]]}$ sont indépendantes.

(b) En déduire $V(S_n)$ en fonction de A_n et B_n (*cf.* partie A) et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(S_n)$.

(c) Démontrer que :

$$\forall n \in N^*, V(S_n) \leq 2n^2.$$

5. (a) Démontrer que :

$$\forall n \in N^*, \forall \alpha \in R_+, P(|S_n - nA_n| \geq n\alpha) \leq \frac{2}{\alpha^2}.$$

(b) En déduire, lorsque $n = 16$, un nombre suffisant de victoires pour remporter la super cagnotte avec une probabilité d'au moins 98 pour cent.