# DS 2 (durée 2h30)

Le sujet se compose de deux problèmes. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

## Problème 1 – Étude d'un procédé de sommation

Dans ce problème, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle. À partir de cette dernière, on définit une nouvelle suite $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$$

Le but du problème est de comparer les natures des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ sur trois exemples.

On utilisera les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^* \quad U_n = 2^n T_n$$

1. **Partie préliminaire**
   Les résultats de cette partie sont des questions de cours. Ils doivent être démontrés explicitement et pourront être utilisés par la suite.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;n]\!], \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$.
2. Dans cette question, on étudie le cas d'une suite constante. On se donne donc $a \in \mathbb{R}$ et on pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a$$
   (a) Exprimer le terme $a_n^*$ pour $n \geq 0$.
   (b) Donner la nature et la somme en cas de convergence des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$.
3. Dans cette question, on étudie le cas d'une suite géométrique. On se donne donc $q \in \mathbb{R}$ et on pose :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = q^n$$
   (a) Exprimer le terme $a_n^*$ en fonction de $q$ et $n \geq 0$.
   (b) Pour $\mid q \mid< 1$, montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et donner sa somme en fonction de $q$.

(c) Même question pour la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ toujours dans le cas $\mid q \mid < 1$.

(d) Pour $q = -2$, donner la nature et la somme en cas de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n$.

(e) Même question pour la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ toujours dans le cas $q = -2$.

4. Dans cette question, on revient au cas général d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quelconque.

(a) Pour $n \geq 0$, prouver que $U_{n+1} = 2U_n + 2^{n+1}a_{n+1}^*$.

(b) Démontrer que $a_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et que $a_k = S_k$ pour $k = 0$.

(c) À l'aide des deux questions précédentes et de la partie préliminaire, prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} S_k$$

5. Dans cette question, on étudie l'exemple suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$

(b) En déduire la nature et la somme en cas de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$.

(c) À l'aide de la question (4.c), et de la partie préliminaire, en déduire $T_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(d) En déduire la nature et la somme en cas de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n^*$.

6. Les natures des séries $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n^*$ sont-elles toujours les mêmes ?

## Problème 2 - d'après GEE 2011

### Partie A

Soit un nombre réel $a$ vérifiant $0 < a < 1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant : $u_0 = 0$, $u_1 \neq 0$ et pour tout $n$ appartenant à $\mathbf{N}^*$,

$$u_n = au_{n+1} + (1-a)u_{n-1}.$$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison $r$ en fonction de $a$. Pour quelle valeur de $a$, notée $a_0$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle constante ? Dans ce cas, déterminer $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de $n$ et de $u_1$.
2. Montrer que $(u_n)$ vérifie une relation de récurrence linéaire double et en déduire, pour $a$ différent de $a_0$ et pour tout $n$ appartenant à $\mathbf{N}$, une expression de $u_n$ en fonction de $u_1$, $a$ et $n$.
3. Soit $n_0$ un entier strictement supérieur à 1 tel que $u_{n_0} = 1$.
   (a) Si $a = a_0$, montrer que $u_n = \frac{n}{n_0}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   (b) Si $a \neq a_0$, montrer que $u_n = \frac{1-(1/a-1)^n}{1-(1/a-1)^{n_0}}$

**Partie B**

Soit un nombre réel $a$ vérifiant $0 < a < 1$.
Soit une expérience ayant deux résultats possibles : $A$ avec une probabilité de $a$ et $B$ avec une probabilité de $1-a$.
Un joueur répète cette expérience, les différents résultats sont indépendants.
Le joueur gagne 1 euro chaque fois que le résultat est $A$ et il perd 1 euro chaque fois que le résultat est $B$.
Il dispose au départ d'une somme de $k$ euros, $k$ appartenant à $\mathbf{N}$.
Il décide d'arrêter l'expérience soit lorsqu'il est ruiné, soit lorsqu'il possède la somme de $n$ euros, où $n$ appartient à $\mathbf{N}^*$ tel que $0 \leq k \leq n$.

1. On prend dans cette question seulement,
$$a = \frac{1}{2}, \quad n = 5 \quad \text{et} \quad k = 3.$$
   Calculer :
   (a) la probabilité pour que le joueur gagne en moins de 6 coups.
   (b) la probabilité pour que le joueur soit ruiné en moins de 6 coups.
   (c) la probabilité pour que le joueur joue au moins 7 coups.
2. On revient au cas général et on note $p_{n,k}$ la probabilité qu'il gagne $n$ euros et $q_{n,k}$ la probabilité pour qu'il soit ruiné. En considérant les possibilités après la première expérience, déterminer une relation entre $p_{n,k+1}$, $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$ d'une part et entre $q_{n,k+1}$, $q_{n,k}$, $q_{n,k-1}$ d'autre part.
3. En utilisant la partie précédente, déterminer $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$.
4. Discuter selon les valeurs de $a$, de : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n,k}$. Interpréter ce résultat.
5. Les événements « le joueur gagne $n$ euros » et « le joueur est ruiné » forment-il un système complet d'événements ? Déterminer $p_{n,k} + q_{n,k}$. Interpréter ce résultat.
6. Écrire une fonction Jeu en Python qui prend en argument un réel $a \in ]0;1[$, trois entiers $k, n, N$ avec $0 \leq k \leq n$ et qui simule une partie dans laquelle le joueur commence avec $k$ euros. Cette fonction renvoie le résultat ("joueur ruiné" ou "joueur gagnant") en précisant le nombre de parties réalisées si celui-ci est inférieur à $N$. Si le nombre de parties dépasse $N$, la fonction retourne la somme possédée par le joueur au bout de $N$ parties.

7. Quelle est l'intérêt d'imposer un nombre $N$ de parties maximales dans le programme Jeu ? Cette contrainte est-elle nécessaire ?

**Rappels Python**

On suppose que le module random est importé via

`import random as rd`

On pourra utiliser la fonction `rd.random()` qui renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0;1[$