Exercices : Probabilités

Problèmes divers et variés

1. On lance un dé truqué à six faces. On suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [|1;6|]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.
2. D'un jeu de 52 cartes, 5 cartes sont distribuées à un joueur.
   (a) Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement trois cartes de carreau ?
   (b) Quelle est la probabilité que ce joueur ait au moins une paire ?
3. On lance 6 fois un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir les six numéros de 1 à 6 ?
4. On distribue les cartes au bridge (chacun des quatre joueurs reçoit treize cartes). Quelle est la probabilité que chaque joueur reçoive un as ?
5. On dispose de deux paires de chaussures différentes. On choisit deux chaussures au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité d'avoir une chaussure gauche et une droite ?
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir tiré une paire de chaussures ?
6. Un homme vient de trouver une carte bancaire dans un D.A.B. et dispose de 3 essais pour trouver le code.
   (a) Quelle est la probabilité pour qu'il réussisse à le trouver avant de bloquer la carte ?
   (b) Il a vu qu'exactement deux des quatre chiffres du code sont identiques. Quelle est alors la probabilité pour qu'il réussisse ?

Tirages dans une urne

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules bleues.

1. On tire simultanément 3 boules dans l'urne.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?
2. On tire successivement 3 boules dans l'urne, en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.
   (a) Répondre aux mêmes questions que dans le cas (1)
3. On tire successivement 3 boules dans l'urne, sans remettre la boule dans l'urne après chaque tirage.
   (a) Répondre aux mêmes questions que dans le cas (1)
   (b) Quelle est la probabilité que la première boule blanche tirée le soit au troisième tirage ?
   (c) Quelle est la probabilité que la deuxième boule blanche tirée le soit au troisième tirage ?

Défauts de production d'une usine

Une usine conditionne un produit agro-alimentaire avec trois machines A, B et C différentes. La machine A effectue 20% de la production et 1% de sa production présente un défaut ; la machine B effectue 30% de la production et 0,1% de sa production présente un défaut ; la machine C effectue 50% de la production et 0,01% de sa production présente un défaut.

1. Déterminer la probabilité pour qu'un produit sortant de l'usine présente un défaut.
2. Si un produit présente un défaut, quelle est la probabilité pour qu'il provienne de A ?

Probabilités composées

1. Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires. On tire une boule. On la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?
2. Une urne contient initialement n boules dont b blanches et $r \geq 4$ rouges, indiscernables au toucher. On tire quatre boules successivement et sans remise de cette urne.
   (a) Quelle est la probabilité que les quatre boules tirées soient rouges ?
   (b) Soit $k \in [|1; r+1|]$. Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au $k-$ème tirage ?

Probabilités sur des univers dénombrables

1. Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Soit P l'application définie sur $(\mathbb{N}*, \mathcal{P}(\mathbb{N}*))$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{n\}) = \mu 3^{-n}$$
   (a) Déterminer μ pour que P soit une probabilité sur $(\mathbb{N}*, \mathcal{P}(\mathbb{N}*))$.
   (b) Calculer la probabilité des nombres pairs de $\mathbb{N}*$.
   (c) Calculer la probabilité des nombres dont le reste par la division par 3 vaut 2.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit P l'application définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{n\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$
   (a) Montrer qu'il s'agit d'une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
   (b) Calculer la probabilité des nombres pairs.
3. Soit $\Omega = \{w_i,\, i \in \mathbb{N}*\}$ que l'on munit de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. On considère la suite (p_n) définie par
$$p_1 \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}*, \quad p_{n+1} = \frac{4}{n}p_n$$
   On définit l'application P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ par :
$$\forall i \in \mathbb{N}*, \quad P(\{w_i\}) = p_i$$
   Déterminer p_1 pour que P soit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
4. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que la suite $(P(\{n\}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Fonctionnement d'un appareil

Soit a, $b \in]0; 1[$. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

— s'il fonction au temps $n \geq 0$, il a la probabilité a de fonctionner au temps $n+1$;
— s'il est en panne au temps $n \geq 0$, il a la probabilité b d'être en panne au temps $n+1$.

On suppose que l'appareil fonctionne au temps 0. Pour $n \geq 0$, on note M_n l'événement « l'appareil est en marche au temps n » et p_n la probabilité de M_n.
On veut déterminer p_n et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Établir, pour $n \geq 0$, une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n.
3. Quelle est la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interprétation ?

Lancer de pièce et tirages dans une urne

On lance une seule fois une pièce équilibrée puis on effectue des tirages successifs dans une urne, contenant initialement une boule blanche et une boule noire, de la façon suivante :
— on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l ?urne ;
— on rajoute ensuite une boule blanche si on a obtenu pile et une boule noire si on a obtenue face ;
— on recommence pour un tirage suivant.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k-ième tirage.
2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu pile.
3. Calculer la probabilité d'avoir obtenu k boules blanches lors des k premiers tirages.