

# VAR discrètes

## I. Variable aléatoire sur un espace probabilisé

**Définition :** Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  toute application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

Pour tout réel  $a$  de  $\mathbb{R}$ ,  $X^{-1}(] + \inf; a]) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$  est un événement de la tribu  $\mathcal{T}$ .

Avec la convention habituelle, cela signifie que  $[X \leq a] \in \mathcal{T}$ .

L'ensemble  $X(\Omega)$  est l'ensemble image où l'ensemble des valeurs prises par  $X$ .

**Propriété :** Si  $X$  est une VAR sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  et si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  alors  $[X \in I]$  est un événement.

**Définition :** Si  $X$  est une VAR définie sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ , le support de  $X$  noté  $Supp(X)$  tout sous ensemble de  $X(\Omega)$  tel que  $P(X \in Supp(X)) = 1$ .

**Définition :** Soit  $X$  une VAR sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . On appelle fonction de répartition de  $X$  la fonction  $F_X$  de  $\mathbb{R}$  dans  $[0; 1]$  définie par  $F_X(t) = P(X \leq t), \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Propriété :** Soit  $F_x$  la fonction de répartition d'une VAR  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . Alors :

1.  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq F_X(t) \leq 1$
2.  $F_X$  est croissante
3.  $F_X$  est continue à droite en tout point  $t \in \mathbb{R}$
4.  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$ .

**Définition :**

1. Deux VAR  $X$  et  $Y$  sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  sont indépendantes si : Pour tout intervalle  $I$  et  $J$  de  $\mathbb{R}$ ,

$$P(X \in I \cap Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$$

2. Une famille de var  $(X_1, \dots, X_n)$  sont indépendantes si pour tout famille d'intervalles  $I_1, \dots, I_n$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$P(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n) = P(X_1 \in I_1) \dots P(X_n \in I_n)$$

3. Une suite de VAR  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est indépendante si toute sous famille est constituée de VAR indépendantes.

**Propriété :** Toute sous famille d'une famille de VAR indépendantes est une famille de VAR indépendantes.

**Propriété :** Si  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+p}$  sont indépendantes, et si  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $v : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  alors  $u(X_1, \dots, X_n)$  et  $v(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$  sont indépendantes

**Propriété :** Si  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  VAR indépendantes et si  $u_1, \dots, u_n$  sont  $n$  fonctions continues telles que  $u_i$  est définie sur  $X_i(\Omega)$  pour tout  $i \in [1; n]$ . Alors  $u_1(X_1), \dots, u_n(X_n)$  sont des VAR indépendantes.

## II. VAR discrètes

**Définition :** Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé. Une VAR  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite discrète si il existe une bijection entre  $X(\Omega)$  et une partie de  $\mathbb{N}$ . Si  $X(\Omega)$  est un ensemble fini on dit que  $X$  est une VAR discrète finie.

Remarque : Si  $x$  et  $Y$  sont deux VAR discrètes, alors  $X + Y, XY, \lambda X$  le sont également.

**Propriété :** Soit  $X$  un VAR discrète sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . On peut alors noter  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$  où  $I \subset \mathbb{N}$ . Alors la famille  $(X = x_i)_{i \in I}$  est un système complet d'événements.

**Définition :** Soit  $X$  une VAR discrète sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ . L'application

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto P(X = x) \end{aligned}$$

est appelée loi de probabilité de  $X$ .

- Donner la loi de probabilité d'une VAR discrète c'est donc donner la valeur de  $P(X = x)$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ .
- Si  $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ , alors  $(X = x_i)_{i \in I}$  est un SCE donc  $\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$ .
- Deux VAR définies sur le même  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  peuvent avoir la même loi sans être égales.

**Propriété :** Soit  $X$  une VAR finie sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ . On pose  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Alors  $F_X$  est une fonction en escalier croissante et :

1.  $F_X(x) = 0$  si  $x < x_1$ .
2. Pour  $\forall k \in [1; n - 1], \forall x_k \in [x_k; x_{k+1}[$ , on a  $F_X(x) = \sum_{i=1}^k P([X = x_i])$
3.  $F_X(x) = 1$  si  $x \leq x_n$

**Propriété :** Si  $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$  avec  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  alors  $\forall i \in [2; n], P(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$ .

## III. Espérance, variance

**Définition :** Soit  $X$  une VAR discrète sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ .

- Si  $X$  est finie, on note  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Alors l'espérance de  $X$  est le réel  $E(X)$  défini par  $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$
- Sinon, on note  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Si la série  $\sum_{i \geq 0} x_i P(X = x_i)$  converge absolument, alors

on dit que  $X$  admet une espérance, notée  $E(X)$  définie par  $E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i P(X = x_i)$ .

**Propriété :** Soit  $X, Y$  deux VAR discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{T}, P)$  admettant une espérance et  $\lambda$  un réel. Alors  $X + \lambda Y$  admet une espérance et  $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$ .

**Définition :** Une variable aléatoire dont l'espérance est nulle est appelée centrée.

**Propriété :** (théorème de transfert. admis) Soit  $X$  une VAR sur un espace probabilisé fini avec et  $u$  une application de  $X(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$ .

— Si  $X$  est finie, on note  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Alors  $u(X)$  admet une espérance et l'espérance de la VAR  $u(X)$  est donnée par  $E(u(X)) = \sum_{i=1}^n u(x_i)P(X = x_i)$

— Sinon on note  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ . Si la série  $\sum_{i=0}^{+\infty} u(x_i)P(X = x_i)$  converge absolument

alors  $u(X)$  admet une espérance et  $E(u(x)) = \sum_{i=0}^{+\infty} u(x_i)P(X = x_i)$ .

**Définition :** Soit  $r \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $\Omega$ . Si  $X^r$  admet une espérance alors on dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $r$ , noté  $m_r(X)$  et on a  $m_r(X) = \sum_{i=1}^n x_i^r P(X = x_i)$  si  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  et  $m_r(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^r P(X = x_i)$  si  $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ .

**Définition :** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $\Omega$ . Si  $X$  admet un moment d'ordre 2 alors on appelle variance de  $X$  le réel définie par  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ .

**Propriété :** (Formule de Koenig-Huygens) Soit  $X$  une VAR sur un espace probabilisé fini  $\Omega$ . La variance de  $X$  est donnée par la formule  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .

**Propriété :** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $\Omega$ . Alors  $V(X) \geq 0$ .

**Propriété :** Si  $(a, b)$  sont un couple de réels et  $X$  une VAR sur un espace probabilisé fini alors  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ .

**Définition :** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $\Omega$ . L'écart-type de la variable aléatoire  $X$  est le réel  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

**Définition :** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $\Omega$ . Si  $\sigma(X) = 1$  on dit que la variable est réduite.

**Propriété :** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $\Omega$ . On suppose que la variance de  $X$  est non nulle. Alors la variable aléatoire  $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  est une variable centrée réduite appelée la VAR centrée réduite associée à  $X$ .

**Propriété :** (Inégalité de Markov) Soit  $X$  une variable aléatoire discrète fini  $\Omega$ , à valeurs positives. On a  $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

**Propriété :** (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit  $X$  une variable aléatoire discrète fini. Alors  $\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

## IV. Lois usuelles

**4.1 Loi uniforme** Le modèle : Dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , on tire une boule au hasard. On note  $X$  le numéro de la boule tirée. Alors la loi de  $X$  est appelé loi uniforme sur  $[[1; n]]$ .

**Définition** : Soit  $n$  un entier non nul. On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la loi uniforme sur  $[[1; n]]$  si  $X(\Omega) = [[1; n]]$  et  $\forall k \in [[1; n]], P([X = k]) = \frac{1}{n}$

**Propriété** : Si  $X$  suit une loi uniforme sur  $[[1; n]]$  alors  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ .

**4.2 Loi de Bernoulli** Le modèle : Dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires, on sait qu'il y a une proportion  $p$  de boules blanches. On tire une boule au hasard. On note  $X$  la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule est blanche et sinon. Alors  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

**Définition** : Soit  $p \in ]0; 1[$ . On dit qu'une VAR  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  si  $X(\Omega) = \{0, 1\}$  et  $P([X = 1]) = p$ .

**Propriété** : Si  $X \leftrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$ .

**4.3 Loi binomiale** Le modèle : Dans une urne contenant des boules blanches et des boules noires, on sait qu'il y a une proportion  $p$  de boules blanches. On tire  $n$  boules avec remise dans l'urne. On note  $X$  le nombre de boules blanches obtenues. Alors  $X$  suit une loi binomiale de paramètre  $n$  et  $p$ .

**Définition** : Soit  $n$  un entier non nul et  $p \in ]0; 1[$ . On dit que la VAR  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  si  $X(\Omega) = [[0; n]]$  et  $\forall k \in [[0; n]], P([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .

**Propriété** : Si  $X \leftrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  alors  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1 - p)$ .

**4.4 Loi Hypergéométrique** Le modèle : On considère une urne contenant  $b$  boules blanches et  $r$  boules rouges. Soit  $n$  un entier inférieur à  $b + r$ . On tire simultanément  $n$  boules de l'urne et on note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues. Alors  $X$  suit une loi hypergéométrique de paramètres  $b + r, n, \frac{b}{b+r}$ .

**Définition** : Soit  $n$  et  $N$  deux entiers tels que  $1 \leq n \leq N$  et  $p \in ]0; 1[$  tel que  $Np$  soit un entier. On note  $q = 1 - p$ . On dit qu'une VAR  $X$  suit une loi hypergéométrique de paramètres  $(N, n, p)$  si  $X(\Omega) = [[\max(0, n - Np); \min(n, Np)]]$  et

$$\forall k \in [[\max(0, n - Np); \min(n, Np)]], P([X = k]) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

**Propriété** : Si  $X \leftrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$  alors  $E(X) = np$  et  $V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$ .

**Propriété :** Soit  $(X_N)$  une suite de VAR telle que  $X_N$  suit la loi hypergéométrique de paramètre  $(N, n, p)$  où  $n$  et  $p$  sont fixés et  $N$  est un entier tel que  $Np$  est entier. soit  $k$  un entier de  $[[0; n]]$  alors

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P([X_N = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

**4.5 Loi géométrique** Le modèle : Dans une urne contenant une proportion  $p$  de boules blanches et  $1-p$  de boules noires, on tire successivement et avec remise une boule jusqu'à obtenir une première boule blanche. On note  $X$  le numéro du premier tirage qui amène une boule blanche.

**Définition :** Soit  $p \in ]0; 1[$  on dit que  $X$  suit la loi géométrique de paramètre  $p$  si  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ . On note alors  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

**Propriété :** Si  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  alors  $X$  admet une espérance et une variance et  $E(X) = \frac{1}{p}$  et  $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .

**Propriété :**  $P(X > k)(X > k+l) = P(X > l)$ .

**4.6 Loi de Poisson** **Définition :** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . On dit que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  si  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ . On note  $X \hookrightarrow (P)(\lambda)$ .

**Propriété :** Si  $X \hookrightarrow (P)(\lambda)$  alors  $X$  admet une espérance et une variance et  $E(X) = \lambda$  et  $V(X) = \lambda$ .

Remarque : Une loi de Poisson permet de modéliser le nombre d'événements qui se produisent dans un laps de temps donné. Par exemple : nombre de clients qui se présentent à un guichet de poste en une heure, nombre de trams qui passent à un arrêt pendant 15 minutes.  $\lambda$  représente le nombre moyen d'événements dans le temps donné.

La simulation : `import numpy as np np.random.poisson(lambda,n)` # crée une liste de  $n$  tirages suivant la loi de poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Propriété :** Si  $n$  est grand et  $p$  proche de 0 alors on peut approcher la loi binomiale de paramètre  $(n, p)$  par une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = np$