Exercices : VAR discrètes

Exercice 1 : Jetons dans une urne

Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On effectue n tirages avec remise. Soit X le nombre de jetons tirés qui portent un numéro pair et Y le nombre de jetons tirés portant un numéro multiple de 3.

1. Quelles sont les lois, espérances et variances de X et Y ?
2. Déterminer les espérances de $(-1)^X$ et de $(-1)^Y$.
3. En déduire la probabilité que X soit pair, la probabilité que Y soit pair.

Exercice 2 : Calculs d'espérances

Soit X suivant une loi binomiale de paramètres n et $1/2$ et Y suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Calculer, si elles existent, les espérances $E(\frac{1}{(X+1)})$ et $E(\frac{1}{(Y+1)})$

Exercice 3 : Déplacement d'une puce

Une puce se déplace sur l'axe des abscisses en partant de l'origine. À chaque seconde, elle saute d'une unité vers la droite avec la probabilité p ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. On note D_n le nombre de sauts vers la droite effectués par la puce après n secondes et X_n la position de la puce après n secondes.

1. Donner la loi de D_n, son espérance et sa variance.
2. Déterminer une relation entre les variables D_n et X_n. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
3. Pour quelles valeurs de p la variable X_n est-elle centrée ?

Exercice 4 : Temps d'attente d'un 1 pour chaque dé

On lance trois dés équilibrés. On met de côté tous les « 1 » puis on relance les dés restants. On met de nouveau de côté tous les « 1 » puis on relance les dés restants. On continue ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de dé à relancer.
Pour $i \in [|1, 2, 3|]$, on définit X_i le nombre de tours nécessaires pour obtenir un « 1 » sur le $i-$ème dé et Y le nombre de tours nécessaires pour terminer la partie.

1. Soit $i \in [|1, 2, 3|]$. Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_i > n) = (\frac{5}{6})^n$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y > n) = 1 - (1 - (\frac{5}{6})^n)^3$$
3. Calculer, si elle existe, l'espérance de Y.

Exercice 5 : Modélisation

1. La proportion de la population française qui a un groupe sanguin AB est de 3%. Dans un hôpital, un patient de groupe sanguin AB nécessite une transfusion d'urgence et il n'y a plus de sang AB disponible.

(a) Quelle est la probabilité que, parmi les 40 personnes en salle d'attente, les médecins trouvent un individu de groupe sanguin AB pour pouvoir effectuer la transfusion ? On supposera que les groupes sanguins des personnes dans la salle d'attente sont indépendants les uns des autres.

(b) Et si on était au Japon, où il y a 10 % des personnes de groupe AB ?

2. A une caisse de supermarché, la probabilité qu'un client paye par chèque est de $\frac{1}{10}$. On suppose que les clients paient de façon indépendante et on note X la VAR indiquant la première fois où un client paie par chèque.

   (a) Donner la loi de X, son espérance.

   (b) Quelle est la probabilité que la caissière doivent attendre strictement plus de 4 clients pour avoir un premier paiement par chèque ?

   (c) Combien doit valoir n pour affirmer que le premier client qui paiera par chèque sera dans les n prochains clients avec une probabilité supérieure à $0,95$?

3. Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poisson de paramètre 3,87.

   (a) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.

   (b) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.

   (c) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?

4. Un ambassadeur reçoit 500 personnes lors d'une réception le 1er janvier. Il a prévu d'offrir un cadeau coûtant 20 euros à chaque invité, sauf aux invités dont l'anniversaire tombe le 1er janvier, qui auront un cadeau coûtant 100 euros. Calculer le coût moyen des cadeaux.

Exercice 6 : Nombre de visiteurs dans un parc d'attractions

Le nombre de visiteurs quotidiens d'un parc d'attractions suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc a dix portes d'entrée E_1, E_2, ..., E_{10} qui sont choisies par les visiteurs de manière équiprobable.

1. Quel est le nombre moyen de visiteurs en une journée ?
2. Quelle est la probabilité qu'un visiteur donné se présente à l'entrée E_1 ?
3. On note X le nombre de visiteurs présents un jour donné. Soit $n \geq 0$. Sachant que $X = n$, quelle est la probabilité que k visiteurs ait choisi d'entrer par la porte E_1 ?
4. On note X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 un jour donné. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
5. Sachant qu'un visiteur sur dix se débrouille pour entrer sans payer, calculer le nombre moyen de visiteurs qui paient leur entrée et qui entrent par E_1.

Exercice 7 : Le problème du collectionneur

Un enfant collectionne des images qu'il trouve dans des tablettes de chocolat. La collection complète est constituée de N images numérotées de 1 à N.

Pour $n \geq 1$, on note X_n le numéro de l'image obtenue dans la $n-$ème tablette de chocolat achetée. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $[|1, N|]$.
Pour $k \in [|1, N|]$, on notera T_k le nombre de tablettes que l'enfant devra acheter pour avoir k images différentes. On s'intéresse dans la suite à T_N, le nombre de tablettes que l'enfant doit acheter pour avoir la collection complète d'images.

1. Calculer $P(T_2 - T_1 = p)$ pour $p \geq 1$.
2. Soit $k \in [|1, N-1|]$. Calculer $P(T_{k+1} - T_k = p)$ pour $p \geq 1$.
3. En déduire $E(T_{k+1} - T_k)$ pour $k \in [|1, N-1|]$.
4. Calculer alors $E(T_N)$ et en donner un équivalent lorsque N tend vers $+\infty$.
   On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N\to\infty}{\sim} \ln N$.

Exercice 8 : Temps de retour à l'envoyeur
$N+1$ joueurs jouent à la balle. Au départ, le joueur 1 a la balle. Chaque joueur lance la balle à l'un des autres joueurs de façon équiprobable.
Pour $n \geq 1$, on note X_n le numéro du joueur qui reçoit la balle au $n-$ème lancer et on convient que $X_0 = 1$. On définit Y le nombre de lancers nécessaires pour que le joueur 1 récupère la balle pour la première fois.

1. On fixe $l \in [|1, N+1|]$. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_{n+1} = l) = \frac{1}{N}(1 - P(X_n = l))$$
2. Pour $n \geq 0$ et $l \in [|1, N+1|]$, calculer $P(X_n = l)$ et en déduire la loi de X_n.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Calculer, si elles existent, les espérances de X_n et Y ainsi que la variance de Y.