Applications linéaires

I. Application linéaire

Définition : Soit E et F deux espace vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application f de E dans F est une application linéaire si :

1. Pour tout $(x, y) \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2. Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme de E et l'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Une application linéaire de E dans F qui est bijective est appelée un isomorphisme.

Si f est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme, on dit que f est un automorphisme.

S'il existe un isomorphisme entre E et F, on dit que ces espaces sont isomorphes.

Remarque : Deux espaces isomorphes ont des propriétés similaires.

Propriété : Soit f une application de E dans F. f est une application linéaire ssi :
$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda) \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n, \forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:
$f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Propriété : Soit $(f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $f + g$ est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.
2. λf est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^n)$

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit f^k par récurrence :

1. $f^0 = Id_E$.
2. $\forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f \circ f^k$.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

1.3 Image et noyau d'une application linéaire

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble $Im(f) = \{y \in F | \exists x \in E, f(x) = y\}$ est l'ensemble image de f.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $Im(f)$ est un sous-espace vectoriel de F. L'image de l'élément nul est l'élément nul, l'image de l'opposé d'un élément est l'opposé de l'image de cet élément.

Propriété : f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. $Ker(f) = \{x \in E | f(x) = 0\}$ est le noyau de f.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'ensemble $Ker(f)$ est un sous espace vectoriel de E.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$.

Propriété : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est injective ssi l'image de toute famille libre de E est une famille libre de F.

1.3 Cas de la dimension finie

Dans la suite les espaces vectoriel sont de dimension finie.

Propriété : Une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée de l'image d'une base.

Propriété : Soit E un $\mathbb{K}-ev$, $(e_1, ..., e_n)$ une famille génératrice finie de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $f_i = f(e_i)$ pour tout $i \in [|1; n|]$.

Alors $Im(f) = Vect(f_1, ...f_n)$.

Définition : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le rang de f est l'entier noté $rg(f)$ et défini par $rg(f) = dim(Im(f))$.

Propriété : Soit $(e_1, ..., e_n)$ base finie de E alors $rg(f) = rg(f(e_1), ...f(e_n))$.

Propriété : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $rg(f) = dim(F)$.

Propriété : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. f est bijective ssi l'image d'une base de E par f est une base de F et dans ce cas f transforme toute base de E en une base de F.

Propriété : Soit E et F deux ev de dimension finie. Il existe une bijection entre E et F ssi $dim(E) = dim(F)$.

Propriété : Soit n un entier naturel non nul. Tout espace de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Propriété : (Théorème du rang, admis) : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $dim(E) = rg(f) + dim(Ker(f))$

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Si $dim(E) = dim(F)$ alors il y a équivalence entre f bijective, f injective et f surjective.

II. Matrices et applications linéaires

Définition : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. On note $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ et $\mathcal{B}_F = (f_1, ..., f_n)$ des bases respectives de E et F.

Pour $j \in [|1;p|]$ on a note $(a_{1,j},...,a_{n,j})$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(f_1,...,f_n)$.
la matrice $A=(a_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ est la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, notée $M_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$.

Remarque : La matrice d'une application f dans des bases B et C est obtenue en écrivant colonne par colonne les coordonnées des images des vecteurs de B dans la base C.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, B une base de E et C une base de F et soit A la matrice de f dans des bases B et C. Alors $\forall x \in E$, si Y est le vecteur colonne des coordonnées de $f(x)$ dans C et X le vecteur colonne des coordonnées de x dans B, on a $Y=AX$.

Propriété : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application qui à tout $x \in \mathbb{K}^p$ de coordonnées X dans la base canonique associe le vecteur $y \in \mathbb{K}^n$ de coordonnées Y dans la base canonique avec $Y=AX$ est une application linéaire dont A est la matrice relativement aux bases canoniques. On l'appelle l'application linéaire canoniquement associée à A.

Remarque : Cela permet de justifier l'isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$. On pourra donc parler de l'image d'une matrice, $Im(A)$, du noyau d'une matrice $Ker(A)$, du rang d'une matrice $rg(A)$.
En particulier **Définition :** Soit S un système, soit A la matrice associée à ce système et soit f l'application linéaire associée à A. Alors $rg(S)=rg(A)=rg(f)$.

Propriété : : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A et celui de ${}^tA$ sont égaux.

Propriété : Soit $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F)^2$ de matrices A et B, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $C=\lambda A+B$ est la matrice de $\lambda f+g$.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ de matrice respectives A et B. Alors $C=A\times B$ est la matrice de $g\circ f$.

Propriété : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. f est bijective ssi la matrice A de f est inversible et alors A^{-1} est la matrice de f^{-1}.

Remarque : en pratique il suffit de trouver une matrice B tel que $AB=I_n$ pour conclure que A est inversible et $B=A^{-1}$

Démonstration : On pose $f(M)=MA$ et on montre que f est une application linéaire bijective (on montre seulement l'injectivité). La surjectivité assure l'existence d'une matrice C telle que $CA=I_n$ et on alors $C=B$ et le résultat.

III. Changement de base

Définition : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et B et B' deux bases de E. On appelle matrice de passage de B à B',notée $P_{B\to B'}$, la matrice des vecteurs de B' exprimés dans la base B.

Exemple :

Propriété : Soit B et B' deux bases de E. La matrice de passage de B dans B' est la matrice de l'application identité dans les bases B' et B.

Propriété : Soit x dans E. Si X_B est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base B et $X_{B'}$ celui dans la base B', alors $X_B = P_{B \to B'} X_{B'}$.

Démonstration :

Exemple :

Remarque :

1. Le changement de base est revient concrètement à faire un changement de référentiel en physique. Le but est d'obtenir un nouveau référentiel dans lequel l'expression de la transformation du plan ou de l'espace s'exprime de façon plus simple. Attention, tous les changements de référentiels en physique ne sont pas des changements de base linéaire.
2. Attention la matrice de passage de B à B' permet d'exprimer les coordonnées dans B à partir des coordonnées dans B'. Utiliser les indices comme moyen mnémotechnique. Pour faire l'opération dans l'autre sens, on utilise la matrice de passage de B' dans B.

Propriété : Si B et B' sont deux bases alors $P_{B \to B'}$ est inversible et $(P_{B \to B'})^{-1} = P_{B' \to B}$.

Exemple :

Propriété : Soit E un espace vectoriel de dim n, de base B et B'. Soit f un endomorphisme de E, alors $M_{B'}(f) = P_{B',B} M_B(f) P_{B,B'}$ ou encore $M_{B'}(f) = (P_{B,B'})^{-1} M_B(f) P_{B,B'}$.

Remarque : utiliser les indices comme moyen mnémotechnique.

Démonstration :

Définition : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$.

Remarque : dans ce cas, B est semblable à A et on dit que A et B sont semblables.

Propriété : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Démonstration :

Propriété : Si A et B sont semblables, alors $rg(A) = rg(B)$.

Propriété : Si A et B sont semblables, alors A^n et B^n sont semblables pour tout entier naturel n.

Démonstration :

Propriété : Si A et B sont semblables alors A est inversible si et seulement si B est inversible et dans ce cas leurs inverses sont semblables.

Démonstration :

Remarque : le but du changement de base est donc de trouver une base dans laquelle l'expression de la matrice est le plus simple possible, faire les calculs de puissance et d'inverse puis revenir à l'ancienne base.

Exemple :

Remarque : le plus simple qu'on puisse trouver est une matrice diagonale. On dit qu'on a diagonaliser la matrice. Est-ce toujours possible ? Quand c'est possible, comment déterminer en pratique la base adéquate ?