Devoir surveillé 3.

Durée : 3 h 30.

Le sujet se compose de deux exercices et d'un problème. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Exercice 1.

Soit n un entier naturel non nul. Une entreprise dispose d'un lot du n feuilles originales qu'elle a numérotées 1, 2, $\ldots$, n.
Elle photocopie ces n feuilles originales et souhaite que chaque original soit agrafé avec sa copie. L'entreprise programme le photocopieur afin que chaque original soit agrafé avec sa copie. Cependant, suite à un défaut informatique, la photocopieuse a mélangé les originaux et les copies. L'entreprise décide donc de placer les n originaux et les n copies dans une boite. Une personne est alors chargée du travail suivant : elle pioche simultanément et au hasard 2 feuilles dans la boite. S'il s'agit d'un original et de sa copie, elle les agrafe et les sort de la boite. Sinon, elle repose les deux feuilles dans la boite et elle recommence.

On modélise l'expérience par un espace probabilité (Ω, T, P). Soit T_n la variable aléatoire égale au nombre de pioches qui sont nécessaires pour vider la boite lorsque celle-ci contient n originaux et n copies (soit $2n$ feuilles).

On considère l'événement A_n : « à l'issue de la première pioche, les deux feuilles piochées ne sont pas agrafées » et a_n sa probabilité c'est-à-dire que $a_n = P(A_n)$.

1. Calculer a_n.
2. **Étude de T_2.**
   On suppose dans cette question que $n = 2$, c'est-à-dire que la boite contient deux originaux et deux copies.
   (a) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$: $P(T_2 = k) = (1 - a_2)a_2^{k-2}$.
   (b) Justifier que la variable $S_2 = T_2 - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de T_2 en fonction de a_2.
3. **Étude de T_3.**
   On suppose dans cette question que $n = 3$, c'est-à-dire que la boite, contient trois originaux et trois copies.
   (a) Calculer $P(T_3 = 2)$ puis $P(T_3 = 3)$ en fonction de a_2 et a_3.
   (b) A l'aide du système complet d'événements $\left(A_3, \overline{A_3}\right)$ démontrer pour tout $k \geqslant 2$ que :
   $$P(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)P(T_2 = k) + a_3 P(T_3 = k).$$
   (c) Montrer, pour tout $k \geqslant 2$, que :
   $$P(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right).$$
   (d) Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(T_3 = k)$.
   (e) Prouver que la variable aléatoire $T_3 - 1$ admet une espérance et calculer $E(T_3 - 1)$.
   Donner la valeur de $E(T_3)$ en fonction de a_2 et a_3.

Exercice 2.

On note $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(R) \mid MK = KM = M\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$ ($\mathbb{R}$).
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $M \in E$ si et seulement $k = g = c = a \quad , \quad h = b \quad$ et $\quad f = d$.
   (b) Déterminer une base de E ainsi que sa dimension.
   (c) Les matrices de E sont-elles inversibles ?

On considère F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels.
On appelle U la matrice de F avec $a = 3, b = 2$ et $c = 4$.

3. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E est en donner une base.
4. On note φ l'application

$$\begin{array}{rll} \varphi : & F & \to \mathbb{R} \\ & A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} & \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j} \end{array}.$$

   (a) Calculer $\varphi(U)$.
   (b) Montrer que l'application φ est linéaire.
   (c) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & c & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$ une matrice de F. Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de a, b et c et en déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$
   (d) Montrer que φ est surjective.

Problème.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal a 2 .
On note $E = R_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes a coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :

$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

PARTIE 1 : Étude d'un endomorphisme de polynômes.

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Calculer $\varphi(X^n)$.
   (c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathscr{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. (a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
   (b) Soit P un polynôme non nul de $\text{Ker}(\varphi)$. Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$), et que P est de degré n.
   (c) En déduire une base de $\text{Ker}(\varphi)$.
4. On pose, pour tout k de $[\![0; n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
   (a) Pour tout k de $[0; n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

PARTIE 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires.

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite de tirages avec remise, et on suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
On note alors, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, Y_k la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors des k premiers tirages.
Par convention, on pose : $Y_0 = 0$.

1. On note, pour tout k de N^*, Z_k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le k-ième tirage amène un numéro qui n'a pas été tiré lors des tirages précédents, et prenant la valeur 0 sinon. On pourra remarquer que, en particulier, $Z_1 = 1$.
   (a) Déterminer la loi de Z_2.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer, pour tout j de $[\![1, k]\!]$, la valeur de $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}([Z_{k+1} = 1])$.
   En déduire : $\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\mathbb{E}(Y_k)$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$, montrer :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}([Z_j = 1]).$$

   (d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$.
   (e) Déterminer alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'espérance de Y_k.
2. On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, G_k le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$G_k = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}([Y_k = i])X^i.$$

(a) Déterminer les polynômes G_0, G_1 et G_2.

(b) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$ et tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}\left([Y_{k+1}=i]\right)=\frac{i}{n}\mathbb{P}\left([Y_k=i]\right)+\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\mathbb{P}\left([Y_k=i-1]\right).$$

(c) Montrer, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_{k+1}=\frac{1}{n}X(1-X)G_k'+XG_k.$$

(d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$G_k=\varphi^k\left(G_0\right).$$

3. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}$, calculer $G_k(1)$ et $G_k'(1)$

(b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}\left(Y_{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\mathbb{E}\left(Y_k\right)+1.$$

(c) Retrouver alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, l'expression de $\mathbb{E}(Y_k)$ obtenue à la question 1. (e) de la partie 2.

4. On rappelle que les polynômes P_0, …, P_n sont définis a la question 4. de la partie A par, pour tout j de $[\![0,n]\!]$:

$$P_j=X^j(1-X)^{n-j}.$$

(a) Calculer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j$.

(b) Montrer, pour tout j de $[\![0,n]\!]$:

$$P_j=\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i.$$

c. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\varphi^k\left(G_0\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k(-1)^{i-j}\right)X^i$$

(c) Montrer finalement, pour tout k de $\mathbb{N}$ et pour tout i de $[\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}\left([Y_k=i]\right)=\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k.$$