Chapitre 7.B Révisions : Systèmes, matrices

I. Systèmes

Définition : On appelle système linéaire de n équations à p inconnues tout système de la forme : $S : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_n = b_n \end{cases}$

où les coefficients $(a_{i,j})_{(i,j)\in[|1;n|]\times[|1;p|]}$ et les seconds membres $(b_i)_{i\in[|1;n|]}$ sont des réels ou des complexes fixées et les nombres $(x_i)_{i\in[|1;p|]}$ sont les inconnues.

Une solution du système est un p-uplet de valeurs $(x_1, x_2, ...x_p)$ pour lequel les n équations sont vérifiées. L'existence et le nombre de solutions dépendent des coefficients.

Le systèmes est homogènes si $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$.

Définition : On appelle système linéaire réduit tout système du type

$$T : \begin{cases} x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + ... + a_{1,p}x_p = b_1 \\ x_2 + a_{2,3}x_3 + ... + a_{2,r}x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a_{2,p}x_p = b_2 \\ ... \\ x_r + a_{2,r+1}x_{r+1} + ... + a_{2,p}x_p = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ ... \\ 0 = b_n \end{cases}$$

Dans le cas d'un système réduit, l'ensemble des solutions peut être vide, contenir une unique solution ou contenir une infinité de solutions.

Définition : Un système S est transformé en un système S' équivalent si :

— On échange la colonne d'indice j_1 avec la colonne d'indice j_2. On note $C_{j1} \leftrightarrow C_{j2}$.

— On échange la ligne d'indice i_1 avec la colonne d'indice i_2. On note $L_{i1} \leftrightarrow L_{i2}$.

— On multiplie la ligne d'indice i par un nombre α non nul. On note $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

— On ajoute à la ligne i_2 la ligne d'indice i_1 multiplié par un nombre α.
On note $L_{i2} \leftarrow L_{i2} - \alpha L_{i1}$.

Propriété : Soient n et p deux entiers naturels non nuls et S un système de n équations à p inconnues. Le système S est équivalent à un système réduit.

Remarque : La méthode utilisée dans l'hérédité porte le nom de méthode du pivot de Gauss. C'est elle qui est utilisée en pratique.

II. Matrices

Définition : On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. Si A est une telle matrice, on note a_{ij} le coefficient de la i^{eme} ligne et de la j^{eme} colonne. La matrice A est alors représentée ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

On écrit aussi $A = (a_{i,j})_{i\in[|1;n|],j\in[|1;p|]}$.

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $n = p$ on dit que la matrice est carrée et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est notée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $n = 1$ on parle de matrice ligne, si $p = 1$ on parle de matrice colonne.

Définition : Deux matrices sont égales si elles ont même taille et mêmes coefficients.

Définition : Soit $A = (a_{i,j})_{i \in [|1;n|], j \in [|1;n|]}$ une matrice carrée. On dit que A est :
- triangulaire supérieure si pour tout couple (i, j) de $[|1;n|] \times [|1;n|]$ on a $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- triangulaire inférieure si pour tout couple (i, j) de $[|1;n|] \times [|1;n|]$ on a $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
- diagonale si pour tout couple (i, j) de $[|1;n|] \times [|1;n|]$ on a $i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$. Dans ce cas, on peut noter $A = Diag(a_{1,1}; a_{2,2}; ...; a_{n,n})$.

Définition : La matrice de taille $n \times p$ dont tous les éléments sont nulles est appellée la matrice nulle de taille $n \times p$ et est notée 0.

La matrice carrée diagonale de taille n dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1 est appelée la matrice identité et est notée Id_n.

Définition : Soit $A = (a_{i,j})_{i \in [|1;n|], j \in [|1;p|]}$. On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice $B = (b_{i,j})_{i \in [|1;p|], j \in [|1;n|]}$ définie par $b_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i \in [|1;p|], j \in [|1;n|]$.

<u>Remarque</u> : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors ${}^t({}^tA) = A$.

Définition : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $A + B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i \in [|1;p|], j \in [|1;n|]}$.

Propriété : La transposée d'une somme de matrice est la somme des transposée des matrices.

Définition : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ un scalaire. On note λA la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{i \in [|1;n|], j \in [|1;p|]}$.

Définition : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit AB de A par B est la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [|1;n|], \forall j \in [|1;q|], c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Propriété : Soient r un entier naturel non nul, λ un réel, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, C et D deux matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, E une matrice de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

1. $(A + B)C = AC + BC$
2. $A(C + D) = AC + AD$
3. $A(\lambda C) = \lambda(AC) = (\lambda A)C$
4. $A(CE) = (AC)E$
5. $I_nA = AI_n = A$
6. ${}^t(AB) ={}^t B^tA$

Définition : Soit A une matrice carré non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit A^n pour tout entier naturel n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} A^0 = I_n \\ A^{n+1} = A^n A, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Propriété : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^n A^p = A^{n+p}$ et $(A^n)^p = A^{np}$.

Propriété : Si A et B commutent, alors on peut utiliser les identités remarquables $A^n - B^n$ et $(A+B)^n$. Attention ces identités sont fausses si A et B ne commutent pas.

Définition : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite inversible 'il existe une matrice B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

La matrice B est alors appelé inverse de A et notée A^{-1}.

L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Propriété : L'inverse d'une matrice inversible est unique.

Propriété : Si A, B et C sont trois matrices telles que $AB = AC$ et si A est inversible alors $B = C$.

Propriété : Soit A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

1. La matrice A^{-1} est inversible et son inverse est A.
2. La matrice AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. La matrice ${}^tA$ est inverible et $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$

Soit S un système linéaire définie par $S : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,p}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,p}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,p}x_n = b_n \end{cases}$.

On pose $A_S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

A_S est la matrice associée au système S, Y est le vecteur colonne associé au second membre, X est le vecteur colonne des inconnues. Le rang de

Le système S est alors équivalent à l'équation matricielle $A_S X = Y$.

Propriété : Soient S un système de n équations à n inconnues et A_S la matrice qui lui est associée. Le système S admet une unique solution si et seulement si la matrice A_S est inversible.

Propriété : Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

Définition : Opérations élémentaires sur les matrices

Comme pour les systèmes, pour une matrice A donnée, on peut permuter deux lignes de A, multiplier une ligne par un réel λ non nul, ajouter à la ligne i la ligne j multipliée par une réel λ.

Propriété : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On note $det(M) = ad - bc$ le déterminant de la matrice M.

La matrice M est inversible ssi son déterminant est non nul et dans ce cas, on a l'expression de M^{-1} :

$M^{-1} = \frac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$