Exercices : Applications linéaires

Exercice 1 : Linéarité d'applications

Dans chacun des cas suivants :

- déterminer si l'application L est une application linéaire ; Si c'est le cas :
  - déterminer $\ker L$ et $\mathrm{Im}(L)$ et en donner des bases lorsqu'ils sont de dimension finie ;
  - dire si L est injective, surjective ou bijective ;
  - donner la matrice de L dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée lorsque c'est possible.

1. $L : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2x + y, x - y) \in \mathbb{R}^2$
2. $L : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, y + z) \in \mathbb{R}^2$
3. $L : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mapsto m_{1,1} + m_{2,2} \in \mathbb{K}$
4. $L : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mapsto^t M \in \mathcal{M}_\in(\mathbb{K})$
5. $L : P \in \mathbb{K}_3[X] \mapsto P' \in \mathbb{K}_2[X]$
6. $L : P \in \mathbb{K}_3[X] \mapsto aP' + P \in \mathbb{K}_3[X]$ avec $a \in \mathbb{K}$
7. $L : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y, y + z, z + x) \in \mathbb{R}^3$
8. $L : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto XP \in \mathbb{K}[X]$
9. $L : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto P + XP' \in \mathbb{K}_n[X]$
10. $L : f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f(a) \in \mathbb{R}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 2 : Étudier une application linéaire vectoriellement ou matriciellement

On définit l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P) = P + P'$

1. Montrer que f est linéaire et donner sa matrice M dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.
2. En travaillant uniquement sur la matrice M :
   (a) Déterminer $\ker(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$.
   (b) Étudier si M est inversible et donner M^{-1} le cas échéant.
   (c) Résoudre l'équation $MX = V$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ avec V le vecteur colonne de taille 3 dont toutes les coordonnées sont égales à 1.
3. Grâce à la question précédente :
   (a) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Étudier si f est inversible et donner f^{-1} le cas échéant.
   (c) Résoudre l'équation $f(P) = X^2 + X + 1$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

On définit maintenant la matrice M suivante qui représente une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée. $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

1. En travaillant uniquement sur l'application linéaire f :

   (a) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Étudier si f est inversible et donner f^{-1} le cas échéant.

2. Grâce à la question précédente :
   (a) Déterminer $\ker(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$.
   (b) Étudier si M est inversible et donner M^{-1} le cas échéant.

Exercice 3 : Définition d'une application linéaire

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre réel. On pose $\begin{cases} \varphi(e_1) & = & e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) & = & e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) & = & e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$

1. Justifier que l'on définit ainsi un endomorphisme φ de E.
2. Si $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ est un vecteur de E, donner la décomposition de l'image de x par φ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Trouver les valeurs de λ pour lesquelles φ est injective, surjective, bijective.

Exercice 4 : Automorphisme

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 + f - 2Id = 0$.

1. Montrer que $\ker f = \{0\}$. En déduire que f est un automorphisme.
2. Exprimer f^{-1} en fonction de f.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de scalaires telles que, pour tout entier naturel n, $f^n = a_n Id + b_n f$.

Exercice 5 : Interpolation de Lagrange

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
On définit l'application $L : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ par $L(P) = (P(0), P(1), P(2))$.

1. Vérifier que L est une application linéaire.
2. Montrer que L est un isomorphisme.
3. Déterminer la matrice A de l'application linéaire L dans les bases canoniques.
4. Justifier que A est inversible, déterminer A^{-1} puis f^{-1}.
5. Chercher tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(0) = 3$, $P(1) = -5$ et $P(2) = 1$.

Exercice 6 : Applications linéaires sur des espaces de suites

On travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on définit l'application $\varphi : E \to E$ par
$\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_n = 4u_{n+2} + 6u_{n+1} + 9u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que L est une application linéaire.
2. Déterminer son noyau et en donner une base.

Exercice 7 : Changements de bases

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Enfin on pose $v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3)$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ et en déduire la matrice de f.
3. Exprimer les vecteurs $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ et $f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3 et v_4 et retrouver l'expression de la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.

Exercice 8 : Étude d'un endomorphisme sur les polynômes

On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$. Déterminer $\deg(\varphi(P))$.
3. Donner $\ker(\varphi)$.
4. Soit $n \geq 2$. On note φ_n la restriction de φ à l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer $\ker(\varphi_n)$ et dire si φ_n est injective, surjective ou bijective.
   (c) Déterminer la matrice de φ_n relativement à la base canonique. Retrouver le résultat de la question précédente concernant la bijectivité de l'application φ_n.