Chapitre 10 Synthèse réduction

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in L(E)$ est un endomorphisme de E, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n.

I. Éléments propres

1.1 Pour un endomorphisme

Définition : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur v non nul de E tel que $f(v) = \lambda v$.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f, noté $Sp(f)$.

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Un vecteur v de E est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ si $v \neq 0$ et $f(v) = \lambda v$.

L'ensemble $E_\lambda(f) = \{v \in E, f(v) = \lambda v\}$ s'appelle l'espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Propriété : λ est une valeur propre de f ssi $E_\lambda(f) \neq \{0\}$ ssi 0 n'est pas valeur propre de f.

Propriété : Si λ est une valeur propre de f alors il existe une infinité de vecteur propre pour la valeur propre λ.

Propriété : $E_\lambda(f) = ker(f - \lambda Id)$ et en particulier $E_\lambda(f)$ est un $K - ev$

1.2 Pour une matrice

Définition : On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur $X \in K^n$ non nul de E tel que $MX = \lambda X$.

L'ensemble des valeurs propres de M est appelé le spectre de M, noté $Sp(M)$.

Définition : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de M. Un vecteur X de $\mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ si $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$.

L'ensemble $E_\lambda(M) = \{X \in \mathbb{K}^n, MX = \lambda X\}$ s'appelle l'espace propre de M associé à la valeur propre λ.

Propriété : Soit $f \in L(E)$, B une base de E et $A = \mathcal{M}_B(f)$.

1. $V \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ ssi le vecteur $v \in E$ de coordonnées V dans la base B est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.
2. λ est valeur propre de A ssi c'est une valeur propre de f.

II. Calcul des éléments propres

2.1 Propriétés

Propriété : (Caractérisation d'une valeur propre)
λ est une valeur propre de f ssi $E_\lambda(f) \neq 0$ ssi $\ker(f - \lambda Id) \neq 0$ ssi $\dim(\ker(f - \lambda Id)) > 0$ ssi $rg(f - \lambda Id) < n$

Propriété : L'ensemble des valeurs propres d'une matrice triangulaire est l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

Propriété : Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

2.1 Recherche des valeurs propres et des espaces propres On cherche λ et $u \neq 0$ de coordonnées U dans une base donnée tels que $f(u) = \lambda u$ ou bien tel que $AU = \lambda U$ (par exemple en cherchant λ tel que $f - \lambda Id$ n'est pas injective). On obtient ainsi les valeurs propres de f ou de A et en même temps l'expression des vecteurs de E_λ.

III. Diagonalisation

3.1 Famille de vecteurs propres

Propriété : Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $v_1, ...v_p$ des vecteurs propres associés respectivement à ces valeurs propres. Alors la famille $(v_1, ...v_p)$ est libre.

Propriété : Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n a au plus n valeurs propres.

Propriété : Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f et $B_1, ...B_p$ des bases respectives de ces valeurs propres. Alors la famille $(B_1, ..., B_p)$ obtenue en concaténant les bases, est libre.

3.2 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition : On dit que f est diagonalisable ssi il existe une base B de E constituée uniquement de vecteurs propres pour f.

Propriété : f est diagonalisable ssi il existe une base B dans laquelle la matrice M de f est diagonale c'est à dire ssi il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}MP$.

Définition : On dit qu'une matrice M est diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété : une matrice est diagonalisable ssi l'application linéaire canoniquement associée à M est diagonalisable.

Propriété : On note $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ les valeurs propres distinctes de f (resp. M). Alors f (resp. M) est diagonalisable ssi $dim(E_{\lambda_1}) + ... + dim(E_{\lambda_1}) = n$.

Propriété : Si f admet n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable et tous les espaces propres sont de dimension 1.

Remarque: Une matrice diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre est une matrice diagonale. Une matrice diagonalisable qui n'a que 0 comme valeur propre est la matrice nulle.

Propriété : Une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.