Exercices : Espaces vectoriels

Exercice 1 : Sous espaces vectoriels de K^n Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ et en donner une base et sa dimension lorsque c'est le cas.

1. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x = y\}$
2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \leq y\}$
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, 2x - y = 0\}$
4. $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases} \right\}$
5. $F = Vect((-1, 1, 1), (0, 1, 2), (-1, 3, 7))$
6. $F = \{(4a - b, a, b + 2c),\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^4\}$

Exercice 2 : Sous-espaces vectoriels de l'ensemble des matrices Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en donner une base et sa dimension lorsque c'est le cas.

1. $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\, \sum_{i=1}^{3} m_{i,i} = 0\}$
2. $F = \{\begin{pmatrix} 2a - b & a + b \\ a - b & 3a + 2b \end{pmatrix},\, a, b \in \mathbb{R}\}$
3. $F = GL_n(\mathbb{R})$
4. F est l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
5. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

   $F = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = A\}$

Exercice 3 : Sous-espaces vectoriels de l'ensemble des polynômes Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et en donner une base et sa dimension lorsque c'est le cas.

1. $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\, P' = 2\}$
2. $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X],\, XP'' - P' = 0\}$
3. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\, \deg P = 2\}$
4. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\, P(1) = 0, P'(1) = 0\}$

Exercice 4 : Autres sous-espaces vectoriels de l'ensemble des fonctions Dans chacun des cas suivants, déterminer si la partie F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\, f \text{ décroissante}\}$
2. $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\, f \text{ impaire}\}$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles muni de l'addition et de la multiplication par un réel $+$ et $\cdot$ usuelles.

1. Vérifier que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.
2. On pose F l'ensemble des suites convergeant vers 0. F est-il un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Exercice 6 : Familles libres, rang d'une famille de vecteurs
Les familles suivantes sont-elles libres ? Donner le rang de la famille.

1. $\mathcal{F} = \{(2,1,-1),(1,1,1),(2,1,2)\}$
2. $\mathcal{F} = \{(1,2,1),(3,1,1),(-1,8,3)\}$
3. $\mathcal{F} = \{x \mapsto \cos x, x \mapsto \sin x, x \mapsto 1\}$
4. $\mathcal{F} = \{X^2+X-1, 2X^2-4, 3X+3\}$
5. $\mathcal{F} = \{X-1, X^2-2, X^3-3\}$
6. $\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\}$

Exercice 7 : Coordonnées dans une base

1. On travaille dans le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{K}^3$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = ((2,1,-1),(3,1,0),(1,0,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $(1,2,-2)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. On travaille dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (X+1, X^2+2, X^2+X)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Si $P = aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.
3. On travaille dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, déterminer les coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$.
4. On travaille dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec $v_1 = e_1+e_2$, $v_2 = 2e_1+e_2-e_3$, $v_3 = e_1+e_3$ et $v_4 = 4e_1-3e_2+e_3$.
   (a) Justifier, sans calcul, que la famille $\mathcal{C}$ est liée.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{D} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
   (c) Exprimer les vecteurs e_1, e_2, e_3 dans la base $\mathcal{D}$
   (d) Déterminer les coordonnées de v_4 dans la base $\mathcal{D}$.