DL 3 : Etude de matrices cycliques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note I_n la matrice identité d'ordre n.
On dit est cyclique si

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, \qquad A^k = I_n$$

1. Quelques généralités sur les matrices cycliques. Soit A une matrice cyclique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et k.
   (b) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\mid \lambda \mid = 1$
2. Un exemple.
   Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 2i & 1+i \\ -1-i & -i & -1-i \\ -2i & -2i & -i \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer les valeurs propres de A (on pourra commencer par remplacer la premier ligne par la somme des trois lignes)
   (b) Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.
   (c) Montrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$
   (d) Montrer qu'il existe une entier naturel non nul k, le plus petit possible, tel que $D^k = I_3$.
   (e) Que peut-on en déduire sur A ?
3. Réduction d'une matrice cyclique.
   Soit n un entier naturel non nul et A une matrice cyclique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   On suppose que le plus petit entier k tel que $A^k = I_n$vaut 3. On a donc $A^3 = I_n$
   On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$d'une base $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$.
   On note a l'endomorphisme tel que A soit la matrice de a relativement à la base $\mathcal{E}$.
   Enfin, on note Id l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $\forall x \in \mathbb{C}^n, Id(x) = x$.
   (a) Si λ est une valeur propre de A, montrer que $\lambda^3 = 1$.
   (b) En écrivant λ sous forme trigonométrique, montrer que $\lambda \in \{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{4i\pi}{3}}\}$ Dans la suite, on note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
   (c) Calculer j^3 et $1 + j + j^2$.
   On note $E_1 = \mathrm{Ker}(a - Id)$, $E_2 = \mathrm{Ker}(a - jId)$, $E_3 = \mathrm{Ker}(a - j^2 Id)$
   (d) Soit $x \in \mathbb{C}^n$, et on suppose qu'il existe $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$,$x_3 \in E_3$ tels que $x = x_1 + x_2 + x_3$.
   Calculer $a(x)$, $a^2(x)$ puis $x + a(x) + a^2(x)$, $x + ja(x) + j^2a^2(x)$, $x + j^2a(x) + jtimea^2(x)$.
   En déduire une expression de x_1, x_2, x_3 en fonction de a et x.
   (e) Soit x appartenant à $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe un unique triplet $(x_1, x_2, x_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$ tel que $x = x_1 + x_2 + x_3$.
   (f) On suppose dans cette question qu'aucun des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3 n'est réduit à $\{0\}$.
   Soit $\mathcal{E}_k$ une base de E_k pour tout $k \in [\![1; 3]\!]$.
   Montrer que la famille $\mathcal{F}$ obtenue par concaténation de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ est une base $\mathbb{C}^n$.
   En déduire que A est diagonalisable.
   (g) Montrer que dans le cas où au moins un des espaces E_1, E_2, E_3 est réduit à $\{0\}$ alors A est encore diagonalisable

   Pour information, ce résultat est valable pour toute valeur de k, autrement dit toute matrice cyclique est diagonalisable.