TD : Equations différentielles

I. Méthode de la variation de la constante

Exercice 1 :

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' + 5y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. $y' + ty = 0$ sur $\mathbb{R}$.
3. $y' + (t^2 - 2t)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. $y' - \cos(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. $t(\ln(t))y' + y = 0$ sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Peut-on trouver une solution dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?
6. $(1 + t^2)y' + 2ty = 0$ sur $\mathbb{R}$.
7. $(1 + t^2)y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(1) = \pi$.

Exercice 2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 5y' - 4y = 0$
2. $y'' + y' + 3y = 0$
3. $y'' + 6y' + 9y = 0$
4. $y'' + 4y = 0$
5. $xy'' + y' = 0$

Exercice 3 :

1. Résoudre l'équation différentielle $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant $x = e^t$ et en cherchant une équation différentielle vérifiée par $z(t) = y(e^t)$).
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ en posant $z = x^2y$.

Exercice 4 :

Trouver toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$.

Exercice 5

Intégrer les équations différentielles avec second membre suivantes :

1. $y' + y = 1$
2. $y' \sin(x) - y\cos(x) + 1 = 0$ sur $]0;\pi[$
3. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$
4. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$ (chercher la solution sous la forme Ce^{-t}).
5. $y'' + 2y' + y = xe^x$ (chercher la solution sous la forme $(a + bx)e^x$)
6. $y'' + a^2y = -2$
7. $y'' + 3y' + 2y = (x - 1)e^{-x}$ (chercher la solution sous la forme $(a + bx + cx^2)e^{-x}$)
8. $y' - y = (x + 1)e^x$
9. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
10. $xy' + y = e^x$
11. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

12. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
13. $(1 + e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$

Exercice 6 Vitesse d'un parachutiste

Un parachutiste tombe à une vitesse de 55 ms^{-1} au moment où son parachute s'ouvre. On fixe l'origine du temps ($t = 0$, en secondes) à ce moment là.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $v(t)$ la vitesse (en ms^{-1}) du parachutiste à l'instant t.

On admet que la résistance de l'air est donnée par : $R = \frac{Pv^2}{25}$ où P est le poids du parachutiste avec son équipement. ($P = mg$, où m est la masse en kg et $g = 9,81$ ms^{-2} est la constante de gravité).

On admet que v est solution de l'équation différentielle : $(E) : v' = g(1 - \frac{v^2}{25})$.

On suppose que $v > 5$ sur $\mathbb{R}_+$, et on pose sur $\mathbb{R}_+ : z = \frac{1}{v-5}$.

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z sur $\mathbb{R}_+$ et la résoudre.

En déduire une expression de $v(t)$ en fonction de t et préciser sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Exercice 7 Résoudre les équations différentielles autonomes du premier ordre suivantes :

1. $y' = y$
2. $y' = 1 + y^2$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
3. $y' - y^2 = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. $y' + e^y = 0$ sur $\mathbb{R}$
5. $y' = sin(y)$ sur $\mathbb{R}$ (poser $u(t) = \cos(y(t)$ pour calculer l'intégrale).

Exercice 8 d'application en biologie (Problème d'évolution de population)

La dynamique des population s'intéresse au développement numérique de toutes les populations d'êtres vivants..

1. Le modèle de Malthus (1761-1834) considère que l'augmentation de la population est proportionnelle à la population.
   (a) Déterminer l'équation vérifiée par la taille de la population, N, dans ce modèle.
   (b) La résoudre.
   (c) Critiquer ce modèle.
2. Vers 1840, Verhulst propose d'améliorer ce modèle en introduisant un facteur qui tienne compte de la capacité d'accueil du milieu et introduit dans l'équation différentielle un facteur qui tend vers 0 quand N tend vers sa taille maximale, fixée, K. L'équation devient : $N'(t) = rN(1 - \frac{N}{K})$ avec r et K, constantes.
   (a) Résoudre cette équation en posant $y = \frac{1}{N}$ (on suppose que N ne s'annule pas).
   (b) On pose $N(0) = 1, K = 100, r = 0.6$. Étudier la fonction N et la représenter sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vers 1825, Gompertz propose, avec la même idée que Verhulst, l'équation $N'(t) = rN\ln(\frac{K}{N})$.
   (a) Résoudre cette équation autonome.
   (b) Avec les mêmes valeurs que dans la questions précédentes, étudier la solution obtenue.