Exercices : Réduction

Exercice 1 : Réduction de matrices Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs propres de la matrice M et les espaces propres associés ; M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
6. $M = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 1-i & 1-i \end{pmatrix}$
7. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : Réduction d'endomorphismes Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f et les espaces propres associés ; f est-il diagonalisable ?

1. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + 4y, -x + 2y) \in \mathbb{R}^2$
2. $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + 3y, 3x - 2y - z, -y + z) \in \mathbb{R}^3$
3. $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mapsto M -^t M \in \mathcal{M}_\in(\mathbb{K})$
4. $f : P \in \mathbb{K}_3[X] \mapsto P' + P \in \mathbb{K}_3[X]$
5. $f : aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto (b + a)X^2 + (a - c)X + (c - b) \in \mathbb{K}_2[X]$

Exercice 3 : Polynômes de matrices et application à la réduction Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$et $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$. On notera $P(A)$ la matrice $a_0I_n + a_1A + ... + a_nA^n$.

1. On suppose que $P(A) = 0$, c'est-à-dire que $P(A)$ est la matrice nulle. Soit λ une valeur propre de A, montrer que $P(\lambda) = 0$.
   La réciproque est-elle vraie ? On pourra regarder le cas de $A = I_n$ et $P(X) = X^2 - X$.
2. On considère la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que $P(A) = 0$. En déduire si la matrice A est diagonalisable.
3. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $4A^2 - 12A + 9I_n = 0$. À quelle condition la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 : Calcul des puissances d'une matrice non diagonalisable Dans cet exercice, on étudie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. On étudie ici la diagonalisablité de A.
   (a) Déterminer les valeurs propres de A.
   (b) Donner les espaces propres associés.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On cherche tout de même à exprimer A sous une forme plus simple.
   (a) Montrer, en effectuant un changement de base, que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n et en déduire A^n.

Exercice 5 : Application de la diagonalisabilité On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer une matrice inversible Z et une matrice diagonale D telle que $P^{-1}AP = D$
2. Résoudre l'équation $Y^2 = D$ d'inconnue la matrice carrée d'ordre 3 Y.
3. En déduire les solutions de l'équation $Y^2 = A$, d'inconnue la matrice carrée d'ordre 3 Y.
4. Trouver toutes les matrices qui commutent avec D.
5. En déduire toutes les matrices qui commutent avec A.
6. Si $(p_n), (q_n), (r_n)$ sont trois suites définies par $p_0 = 1, q_0 = 0, r_0 = 0$ et pour tout n entier naturel :
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 2p_n - q_n - r_n \\ q_{n+1} &= p_n - r_n \\ r_{n+1} &= p_n - q_n \end{aligned}$$
   (a) Traduire la définition des suites sous forme matricielle à l'aide de A (en introduisant une suites de matrices colonnes (X_n)).
   (b) En déduire l'expression de p_n, q_n, r_n pour tout n entier naturel.

Exercice 6 : diagonalisation d'une matrice de taille n

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & (0) & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Déterminer le rang de A.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres de A.
3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 : diagonalisation d'une application linéaire involutive

On considère un espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme f de E qui vérifie $f^2 = Id$.

1. Montrer que les applications Id et $-Id$ sont solutions de l'équation.
2. A partir de maintenant on suppose que $f \neq -Id$ et $f \neq Id$.
   (a) Montrer que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
   (b) On pose $F = Ker(f - Id)$ et $G = Im(f - Id)$. Justifier rapidement que F et G sont des espaces vectoriels.
   (c) Montrer que $G = ker(f + Id)$.
   (d) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
   (e) Montrer que si $x \in E$, il existe une unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
   (f) En déduire que la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E
   (g) Écrire la matrice de f dans cette base.