Chapitre : Intégrales généralisées

I. Convergence d'une intégrale généralisée

1.1 Cas d'un intervalle semi-ouvert

Définition : Soit $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a;b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Si $\displaystyle\lim_{x\to b, x<b} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie, on dit alors que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge en b et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b, x<b} \int_a^x f(t)dt$. Sinon, on dit que l'intégrale diverge.

Propriété :(intégrale faussement impropre)

Si f est continue sur $[a;b[$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et si f admet une limite finie en b (c'est à dire si f est prolongeable par continuité en b), alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergent et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \tilde{f}(t)dt$ avec $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur $[a;b]$.

1.2 Cas d'un intervalle ouvert

Définition : Soit f continue sur $]a;b[$ ou $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge s'il existe c in $]a;b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ convergent. Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. Sinon on dit que l'intégrale diverge.

Définition : Soit f définie sur une intervalle d'extrémité a et b. On suppose que f est continue, sauf en un nombre fini de point $(a_i) \in I$. Si on note $a_0 = a$ et $a_{n+1} = b$ alors on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge ssi les intégrales $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt, for i \in [|0;n|]$ sont convergentes.

On a alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$.

II. Propriétés des intégrales généralisées

Propriété : Soient (f,g) deux fonctions continue sur $[a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$., soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si$\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b f + \lambda g$ converge et $\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.

Propriété :(relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ et $c \in [a,b[$ alors $\int_a^b f$ et $\int_c^b f$ sont de même nature et $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Propriété :(positivité de l'intégrale) Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b[$ (avec $a < b$). Si $\int_a^b$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$

Propriété :(croissance de l'intégrale) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b[$ (avec $a < b$) telles que $f(t) \leq g(t) \forall t \in [a;b[$.

On suppose que $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$

Propriété :(Intégration par parties, cas C^1 sur un segment) Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a;b]$. $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Propriété :(Changement de variables) . Soit $\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 strictement croissante. On pose $\alpha = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x\to b} \varphi(x)$. Soient f une fonction continue sur $[\varphi(a), \varphi(b)[$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)du$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence, ie

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du$$

Propriété : Si f est une fonction continue et paire (resp. impaire) sur $]-a;a[$ et si $\int_0^a f$ converge alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$ (resp $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

III Théorèmes de comparaison

Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b[$.

On pose $\forall x \in [a,b[, \quad F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt.$

Si F est majorée sur $[a,b[$, alors $\int_a^b f$ converge, sinon, F tend vers $+\infty$.

Propriété : Soient f,g deux fonctions continues et positives sur $[a,b[$ telles que $0 \leq f \leq g$ sur $[a,b[$.

1. Si $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge.
2. Si $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. On dit que $\int_a^b f$ converge absolument si $\int_a^b \mid f \mid$ est convergente.

Propriété : Si l'intégrale d'une fonction est absolument convergente, alors elle est convergente.

IV. Intégrales classiques

Propriété :$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ converge ssi $\lambda > 0$ et dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$.

Propriété :$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$.