Exercices : Intégrales généralisées

Exercice 1 : Calcul d'intégrales généralisées

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$
3. $\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{t^3}$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$
6. $\int_0^1 \ln(t)dt$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t dt$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}dt$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+3)^2}dt$
11. $\int_0^{+\infty} t^2e^{-4t}dt$
12. $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt$

Exercice 2 : Natures d'intégrales Dans chaque cas, préciser la nature de l'intégrale généralisée.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t\sqrt{t}}dt$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t-1}{t^2}dt$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t^3}dt$

Exercice 3 : Intégrale généralisée du sinus cardinal

1. Grâce à une intégration par parties, étudier la nature de l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$$
2. En déduire la nature de l'intégrale :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(e^t)dt$$
Indication : on pourra poser $u = e^t$.

Exercice 4 : Calculs d'intégrales généralisées Dans chaque cas, étudier la nature de l'intégrale à l'aide de la méthode indiquée et, dans les cas de convergence, la calculer lorsque cela est demandé.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}dt$ (utiliser une IPP ; calculer l'intégrale)
Indication : $\frac{1}{(1+t^2)t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sin t dt$ (utiliser une IPP ; calculer l'intégrale)
3. $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ (utiliser une IPP ; calculer l'intégrale)

4. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$ (utiliser $u = e^t$; calculer l'intégrale)
5. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$ (utiliser $u = \sqrt{t}$; calculer l'intégrale)

Exercice 5 : Suites d'intégrales généralisées On considère les intégrales généralisées

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

On introduit également les intégrales

$$\forall n \in \mathbb{N}*, \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

1. Montrer par récurrence que les intégrales I_n sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser une intégration par parties.
2. Déterminer une relation entre I_{n+1} à I_n puis donner l'expression de I_n en fonction de n.
3. Montrer que les intégrales J_n sont bien définies pour tout $n \in \mathbb{N}*$.
4. Prouver que la suite (J_n) est convergente.
5. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre J_{n+1} et J_n puis déterminer l'expression de J_n en fonction de n.

Exercice 6 : Fonction définie par une intégrale

On pose $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$

1. Montrer que si $x > 0$, $f(x)$ est bien défini.
2. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer $f(x+1) + f(x), \forall x > 0$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
4. Montrer que si $0 < x < y \Rightarrow \mid f(y) - f(x) \mid < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.