Chapitre 13 VAR densité

Définition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si :

1. $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Définition : On dit qu'une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et de fonction de répartition F_X est une variable aléatoire de densité f si :

1. f est une densité de probabilité.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Propriété : Soit f une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et une VAR X définie sur cette espace telle que f est une densité de X.

Propriété : Soit X une VAR de densité f et de fonction de répartition F_X.

1. F_X est continue sur $\mathbb{R}$.
2. F_X est de classe $\mathbb{C}^1$, avec $F' = f$, sauf peut être en un nombre fini de points.

Propriété : Soit X une VAR et F_X sa fonction de répartition. Si F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathbb{C}^1$ sauf en un nombre fini de points alors X est une VAR à densité. Toute fonction f positive qui vérifie $F' = f$ en tout point où F est dérivable est une densité de X.

Propriété : Soit F une fonction définie, croissante sur sur $\mathbb{R}$, ayant pour limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf peut être en un nombre fini de points. Alors il existe une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et une VAR X définie sur cette espace telle que F est la fonction de répartition de X.

Propriété : Si X est une variable à densité alors $\forall x \in \mathbb{R}, P(X = x) = 0$.

Propriété : Soit X une VAR à densité, de densité f et de fonction de répartition F. Alors

1. $\forall x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) = P(X < x) = F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, P(X \geq x) = P(X > x) = 1 - F(x) = \displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)dt$.
3. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt$.

Définition : Soit X une VAR de densité f. On dit que X admet une espérance, notée $E(X)$ si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ est absolument convergente et dans ce cas : $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$.

Propriété : Soit X une VAR admettant une densité f et une espérance $E(X)$ et (a, b) deux réels. Alors $aX + b$ admet une densité et $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Propriété : Soit X et Y deux VAR à densité définies sur un même espace probabilisé et admettant une espérance. Si $X + Y$ est une VAR à densité alors elle admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Propriété : (théorème de transfert) Soient X une VAR de densité f et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf en un nombre fini de points. On suppose que $\varphi(X)$ est à densité. Si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(t)dt$ converge absolument alors $\varphi(X)$ admet une espérance et $E(\varphi(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f(t)dt$.

Définition : Soit X une VAR de densité f. Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que X admet un moment d'ordre n si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$ converge absolument et dans ce cas on note $m_r(X) = E(X^n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$.

Propriété : Si X admet un moment d'ordre n alors X admet un moment d'ordre k pour $k \leq n$.

Définition : Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2. Alors X admet une variance, notée $V(X)$ définie par $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

Propriété : (formule de Koenig-Huygens) Si X est une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2 alors $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

Propriété : Si X est une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2 et a, b sont deux réels alors $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Définition : Si X est une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2 alors X admet un écart-type, noté $\sigma(X)$ et défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Définition : Soient a, b deux réels avec $a < b$. La VAR X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par $f(t) = \frac{1}{b-a}$ si $t \in [a, b]$ et $f(t) = 0$ sinon.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$.

Propriété : La fonction de répartition d'une VAR suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ est définie par :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & \forall t \in]a, b[\\ 1 & \forall t > b \end{cases}$$

Propriété : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$, alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Définition : Soit $\lambda > 0$. On dit que X est une VAR suivant une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour densité la fonction f définie par :
$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \forall t \geq 0 \\ 0 & \forall t < 0 \end{cases}$
On note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Propriété : La fonction de répartition d'une VAR suivant la loi exponentielle de paramètre λ est définie par :
$F(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \forall t \geq 0 \end{cases}$

Propriété : Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Propriété : (absence de mémoire) Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors $\forall (s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2, P_{[X \geq s]}(X \geq s+t) = P(X \geq t)$.

Définition : On dit qu'une VAR X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction f définie par :
$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \forall t \in \mathbb{R}$.
On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Propriété : La fonction de répartition de la loi normale, qui est généralement noté Φ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
2. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
3. $\forall x > 0, P(\mid X \mid \leq x) = 2\Phi(x) - 1$.

Propriété :
Si X suit la loi normale centrée réduite, alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = 0$, $V(X) = 1$.

Définition : Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit que la VAR X suit la loi normale de paramètre m et σ^2 si elle admet pour densité la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Propriété : La VAR X suit une loi normale de paramètre (m, σ^2) si et seulement si la VAR $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

Propriété : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$.

Propriété : Soient f et g deux densités de probabilité. Pour tout x réel les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ convergent et sont égales. De plus la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ est une densité de probabilité.

h est appelé le produit de convolution de f et g.

Démonstration : admis.

Propriété : Soient X et Y deux VAR indépendantes de densité respective f_X et f_Y. Alors $X+Y$ est une VAR à densité et sa densité f est donnée par la formule (produit de convolution) :

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt$

Propriété : Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, {\sigma_1}^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, {\sigma_2}^2)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, {\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)$.