DL 4 : Variable à densité

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 < f(x) \leq 1.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, non nul, et tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{xe^{-nx}}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x - 1} - \sum_{k=1}^{n} xe^{-kx}.$$

3. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, et pour tout M strictement positif,

$$\int_0^M xe^{-nx}\mathrm{d}x.$$

   En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\mathrm{d}x$$

   est convergente et donner sa valeur en fonction de n.

4. Donner, pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel strictement positif, un encadrement de

$$\int_0^M \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}\mathrm{d}x.$$

   En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}\mathrm{d}x$$

   est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}\mathrm{d}x = 0.$$

5. Déduire des questions précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Partie B

Soient $k \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathbf{R}$. On considère la variable aléatoire T qui donne, en jours, le délai entre la commande et la livraison d'un colis dans une société de vente par correspondance et on suppose qu'une densité de probabilité est la fonction g définie par :

$$g : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ate^{-kt} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de A en fonction de k. Dans la suite du problème, A prendra cette valeur.
2. Dans cette question, on prend : $k = 2$.

(a) Étudier la fonction g et établir son tableau de variations. Vous préciserez les coordonnées du maximum et vous donnerez une équation des demi-tangentes au point d'abscisse $t = 0$.

(b) Tracer la courbe représentative de g.

(c) Quelle est la probabilité qu'un colis soit livré en moins de trois jours ?

(d) Quelle est la probabilité qu'un colis soit livré en plus de deux jours, sachant qu'il l'est en moins de cinq jours ?

3. Dans cette question, k est un entier naturel non nul quelconque.

(a) Déterminer les réels α et β tels que la fonction $h : t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-kt}$ soit une primitive de g sur $\mathbf{R}^+$. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de la variable aléatoire T.

(b) Déterminer de même l'espérance de la variable aléatoire T^2. En déduire l'existence et la valeur de la variance de la variable aléatoire T.