DS 4 (durée 2h30)

Le sujet se compose de deux problèmes . Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

Problème 1. GEE 2010

Soit λ un réel donné, et soit I l'intervalle $]-1;1[$.

1. Déterminer les réels a et b dépendants de λ tels que pour tout $x \in I$,
$$\frac{3x+1-\lambda}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$$
On considère l'équation différentielle :
$$(E_\lambda) : (1-x^2)y'(x) + (3x+1-\lambda)y(x) = 0$$
2. Résoudre cette équation sur I pour tout réel λ.
3. On admettra que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha(1-x)^\beta$ est un polynôme si et seulement si α et β sont des entiers naturels.

   Montrer que les seules valeurs de λ pour lesquelles les solutions de $(E_\lambda$ sont des polynômes sont : $\{-2;0;2;4\}$. Préciser alors les solutions correspondantes.

   Soient $\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 , et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

   On note R et S les polynômes définis sur $\mathbb{R}$ par $R(X) = 1 - X^2$ et $S(X) = 1 + 3X$.

   Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on désigne par P' son polynôme dérivé.
4. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a : $RP' + SP \in \mathbb{R}_3[X]$.
5. Montrer que l'application f qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe $f(P) = RP' + SP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
6. Calculer $f(P)$ pour $P \in \{1, X, X^2, X^3\}$, et en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
7. Soient Q un vecteur propre de f , et λ la valeur propre associée à Q . Donner une relation vérifiée par Q et λ . En déduire, en utilisant la question 3, les valeurs propres de f et les vecteurs propres associés.
8. En déduire que A est diagonalisable. En rangeant les valeurs propres par ordre croissant, déterminer une base de $\mathbb{R}_3[X]$, appelée $\mathcal{B}'$, formée de vecteurs propres de f qui sont des polynômes dont le coefficient dominant est égal à 1. Ecrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ à cette base $\mathcal{B}'$, matrice que l'on notera V.

9. Ecrire une relation entre la matrice A, la matrice V , et une matrice diagonale D que l'on précisera.
10. Calculer V^2, et en déduire V^{-1} .

Problème 2. Agro-Veto 2014

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

On dit que F est *stable par* f si et seulement si $\forall x \in F, f(x) \in F$.

1. Quelques calculs préliminaires.

   Considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

   ${}^tM$ désigne la transposée de la matrice M

   (a) Etude des éléments propres de M.
      i. Déterminer les (ou la) valeurs propres de M.
      ii. Déterminer les sous-espaces propres de M.

   (b) Etude des éléments propres de ${}^tM$, transposée de la matrice M.
      i. λ appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que les matrices $M - \lambda I_3$ et ${}^tM - \lambda I_3$ ont le même rang.
      En déduire les valeurs propres de ${}^tM$.
      ii. Déterminer les sous-espaces propres de ${}^tM$.

2. Quelques généralités.

   Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E.

   (a) Sous-espaces vectoriels triviaux stables par f.
   Montrer que $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels stables par f.

   (b) Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie. Notons p la dimension de F et introduisons $\mathcal{B}_F = (u_1, ..., u_p)$ une base de F.
   Montrer que F est stable par f si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!], f(u_k) \in F$.

   (c) Droites vectorielles stables par f.
   Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 1. Introduisons une base $\mathcal{B}_F = (u)$ de F.
   Montrer que F est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.

3. Etude des plans stables en dimension 3.

   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, f un endomorphisme de E et notons A sa matrice dans la base $\mathcal{B}_E$. Enfin soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

(a) Mise en place de l'équation de F dans la base $\mathcal{B}_E$.
Soit $\mathcal{B}_F = (u_1, u_2)$ une base de F.

i. Justifier l'existence d'un vecteur u_3 de E tel que la famille $\mathcal{U}_E = (u_1, u_2, u_3)$ soit une base de E.

ii. Introduisons alors la matrice de passage Q de la base $\mathcal{U}_E$ à la base $\mathcal{B}_E$ (attention à l'ordre des bases !) que nous noterons :

$$Q = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Montrer que a, b, c sont non tous nuls.

iii. Soit x appartenant à E.
Notons :
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_E$ et
$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{U}_E$.
Rappeler le lien matriciel entre Q, X et X' et en déduire que $x_3' = ax_1 + bx_2 + cx_3$.

iv. En déduire que pour tout vecteur x de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}_E$:

$$x \in F \Longleftrightarrow ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

La condition $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ est appelée l'équation de F dans la base $\mathcal{B}_E$. Nous admettrons qu'elle est indépendant du choix de la base $\mathcal{U}_E$.

(b) Condition nécessaire et suffisante de stabilité de F par f.

i. Dans cette question, nous supposons F stable par f.
Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{U}_E$, notée B dans la suite, est de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \gamma) \in \mathbb{R}^7$

ii. Après avoir justifié l'égalité matricielle : ${}^tQ{}^tB ={}^t A{}^tQ$, en déduire que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$.

iii. Réciproquement, supposons que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$ de valeur propre λ.
Justifier l'égalité matricielle $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \times A = \lambda \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$

iv. Soit x appartenant à E.
Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_E$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_E$.
Montrer que $ay_1 + by_2 + cy_3 = \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3)$.
En déduire que F est stable par f.

4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

   Nous considérons alors l'endomorphisme f de E tel que sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}_E$ soit la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Déterminer les sous-espaces vectoriels de E stable par f.