Exercices : VAR densité

Exercice 1 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{a}{\sqrt{t-1}}, \forall t \in]1;2]$ et $f(t) = 0$ sinon.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Pour cette valeur de a, soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la valeur de la probabilité $P(2X^2 - X - 3 \leq 0)$.

Exercice 2 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer si Y est à densité et en donner une le cas échéant.

Exercice 3 : Loi de Cauchy avec une loi uniforme
Soit θ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

1. Calculer $P(\theta = \pm\frac{\pi}{2})$ et justifier que l'on peut définir la variable $X = \tan(\theta)$.
2. Déterminer la loi de $X = \tan\theta$. Est-elle à densité ? Si oui, en donner une.
3. La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la donner.

Exercice 4 :
La taille T d'une plante suit, en conditions naturelles, une loi uniforme sur l'intervalle $[3;8]$. Dans une pépinière, à la fin de sa croissance naturelle, si sa taille est inférieure à 4, on lui met de l'engrais pour faire doubler sa taille ; si sa taille est supérieure à 4, on ne fait rien. On note F la taille finale de la plante.

1. Déterminer la loi de F. Est-elle à densité ? Si oui, en donner une.
2. La variable F admet-elle une espérance ? Si oui, la donner.

Exercice 5 : Le premier arrivé est le premier servi
Paul et Sophie se rendent chaque jour, indépendamment l'un de l'autre, dans le même restaurant entre 12h et 14h. En prenant 13h comme origine des temps, l'heure d'arrivée de Paul est une variable aléatoire X de densité f définie par : $f(x) = 1 - | x |, \forall x \in [-1;1]$ et $f(x) = 0$ sinon. L'heure d'arrivée de Sophie est une variable Y qui suit la loi uniforme sur $[-1;1]$.

On note Z la variable aléatoire égale à l'heure du premier arrivé.

1. Déterminer la loi de la variable Z.
2. Donner, si elle existe, l'espérance de la variable Z.

Exercice 6 : Loi du maximum ou du minimum de variables aléatoires indépendantes

Soient $(X_1, ..., X_n)$ une famille de $n \geq 1$ variables aléatoires à densité définies sur le même espace probabilisé et supposées mutuellement indépendantes. On définit alors les variables aléatoires S_n et I_n par $S_n = \max_{k\in[|1;n|]} X_k \quad I_n = \min_{k\in[|1;n|]} X_k$

1. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que X_1 et X_2 suivent des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$ respectivement.
   (a) Déterminer la loi de S_2. Est-elle à densité ? Si oui, en donner une.
   (b) Déterminer la loi de I_2. Est-elle à densité ? Si oui, en donner une. Quelle est la loi de la variable I_2 ?
2. Dans cette question, n est quelconque. On suppose que toutes les variables $(X_k)_{k\in[|1;n|]}$ suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$.
   (a) Montrer que S_n et I_n sont des variables à densité.
   (b) Déterminer les espérances $E(S_n)$ et $E(I_n)$ ainsi que leurs limites lorsque $n \to +\inf$.

Exercice 7 : Polynôme du second degré aléatoire

Soit A une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(3, 4)$. Quelle est la probabilité que le polynôme $P(x) = x^2 - Ax + 1$ admette :

1. deux racines réelles distinctes ?
2. une racine réelle double ?
3. deux racines complexes distinctes ?

Exercice 8 : Loi du poids des tablettes de chocolat dans une coopérative

À Haïti, une coopérative produit des tablettes de chocolat. Le fabricant estime que le poids des tablettes de chocolat suit une loi normale. Sur un échantillon de 400 tablettes produites par la coopérative, 250 font moins de 155 grammes et 380 font plus de 147 grammes.

1. Si on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, estimer μ et σ. On arrondira les résultats à l'entier inférieur.
2. Estimer le pourcentage de tablettes pesant plus de 153 grammes.
3. On prélève une tablette au hasard. Sachant qu'elle pèse plus de 150 grammes, calculer la probabilité qu'elle pèse moins de 153 grammes.
4. Stéphane achète 10 tablettes de chocolat à la coopérative. On note Y la variable aléatoire donnant le poids de chocolat dont dispose ainsi Stéphane. Préciser la loi de Y.
5. Calculer la probabilité que Stéphane ait au moins 1 kg 530 grammes de chocolat.

Exercice 9 : Durée de vie d'un oscilloscope

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Statistiquement, on a observé que sur un échantillon de 1000 appareils, 286 appareils ont eu une durée de vie de plus de 10 ans.

1. Estimer λ On arrondira le résultat au centième.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné 8 années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Exercice 10 : Lois de sommes de variables indépendantes

On rappelle que si X et Y sont deux VAR indépendantes de densité respective f_X et f_Y, alors $X+Y$ est une VAR à densité et sa densité f est donnée par la formule (produit de convolution) :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$

1. Soient Z_1 et Z_2 deux variables indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. Déterminer la loi de $-Z_2$. En déduire la loi de la variable $D = Z_1 - Z_2$ puis celle de la variable $E = \mid Z_1 - Z_2 \mid$.
2. Soient Z_1 et Z_2 deux variables indépendantes de lois normales respectives $\mathcal{N}(2,1)$ et $\mathcal{N}(0,5)$. Donner la loi de $C = 3Z_1 - 5Z_2$.