DS 5 (durée 3h30. D'après AgroB2014)

Le sujet comporte cinq pages et un problème. Les documents et la calculatrice sont interdits. Il sera tenu compte de la présentation, de la rédaction et de l'encadrement des résultats dans la notation.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur dans l'énoncé, indiquez-le sur votre copie en précisant les modifications que vous avez été amenés à effectuer.

A la fin du sujet, vous trouverez en annexe une liste (non exhaustive) de fonctions PYTHON pouvant être utilisées dans les programmes.

Les parties A, B, C du problème sont indépendantes.

A. Démonstration d'une égalité

Le but de cette partie est d'établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante (qui sera ensuite utilisée dans la partie C) :

$$(\diamondsuit) \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

A cette fin, on notera G une variable aléatoire de loi normale d'espérance nulle et de variance 1, et $Y = G^2$.

1. On établit ici une densité de la loi de Y.
   (a) Exprimer $F(y) = P(Y \leq y)$ pour tout $y > 0$.
   (b) Justifier que Y est une variable aléatoire réelle à densité.
   (c) En déduire qu'une densité de Y est donnée par la fonction f définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par

$$f(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}}, \forall y > 0 \\ 0, \forall y \leq 0 \end{cases}$$

   Dans la suite, on dira qu'une variable aléatoire réelle ayant pour densité f suit la loi du χ_1^2 (loi du khi-deux à un degré de liberté).

2. (a) Le but de cette question est de déterminer une densité de la somme de deux variables de loi χ_1^2 indépendantes. On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de densités respectives u et v définies sur $\mathbb{R}$, alors une densité de $U + V$ est donnée par

$$w : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}\,t$$

   Pour $z > 0$, on pose

$$I(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{y(z-y)}}$$

   i. Montrer que, pour tout $z > 0$, l'intégrale $I(z)$ est bien définie et que $I(z) = \pi$ en effectuant le changement de variable $y = z\sin^2(t)$ avec $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

   ii. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi χ_1^2. A l'aide de ce qui précède, montrer que $Z = Y_1 + Y_2$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, notée par la suite $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

(b) Dans cette partie, on rédige des programmes en PYTHON dans le but de simuler une loi exponentielle.

i. Que renvoie le programme suivant ? Justifier soigneusement.

```
import random as rd

def MYSTERE():
   return rd.gauss(0,1)**2
```

ii. Écrire un programme `simulexp` en PYTHON qui prend en argument un entier n et qui renvoie une liste contenant n réalisations d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ (on pourra utiliser la fonction `MYSTERE` définie précédemment).

iii. Écrire un programme qui affiche un histogramme permettant de visualiser la répartition des valeurs obtenues lorsqu'on fait 1000 simulations d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ (on pourra utiliser le programme simulexp et on choisira de regrouper les valeurs en 100 classes).

(c) Dans cette question, on calcule deux espérances afin d'en déduire ($\diamondsuit$). Soient Y une variable aléatoire de loi χ^2_1 et Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$. On admettra dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y^n et Z^n possèdent une espérance.

i. A l'aide d'une intégration par partie soigneusement justifiée, établir pour tout entier naturel $n \geq 2$ une relation de récurrence entre $E(Z^n)$ et $E(Z^{n-1})$. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la valeur de $E(Z^n)$. Le résultat sera donné à l'aide d'une factorielle.

On admet qu'on obtient, par un raisonnement analogue, pour tout entier nature $n \geq 1$:

$$E(Y^n) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$$

ii. Déterminer une seconde expression de l'espérance de Z^n à partir de l'égalité $Z = Y_1 + Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont indépendantes et suivent la loi du χ^2_1.

iii. En déduire ($\diamondsuit$)

Dans la suite du problème, on appellera "graphe" tout dessin dans lequel un ensemble de sommets sont reliés par des arêtes. Le dessin G_1 (ci-dessous) représente un exemple de graphe. Dans ces dessins, les sommets du graphe sont des cercles numérotés (de 1 à 3 dans le graphe G_1). Les arrêtes du graphe sont les flèches reliant deux sommets. On remarquera les points suivants :

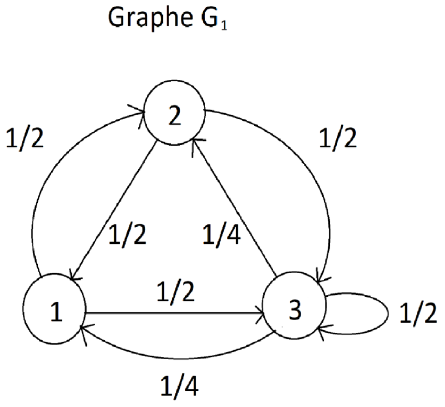
— Entre deux sommets distincts i et j, on peut avoir une flèche de i vers j et une de j vers i
— Certains couples de sommets ne sont pas reliés par une arrête
— Une arrête peut relier un sommet à lui-même (c'est le cas du sommet 3 de G_1).
— Pour tout couple (i, j) de sommets, l'arrête allant de i à j est étiquetée par un réel $s_{i,j} \in [0, 1]$, représentant une probabilité de passer d'un sommet à l'autre en suivant cette arrête (par exemple $s_{3,1} = \frac{1}{4}$ dans le graphe G_1).
— Pour tout sommet i, la somme des probabilités étiquetant les arrêtes partant de i est égale à 1.

Une particule est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet i d'un graphe G. Elle saute aléatoirement à l'instant $n = 1$ sur un autre sommet de G en suivant une des arrêtes partant de i, la probabilité qu'elle suive l'arrête de i vers j étant égale à $s_{i,j}$. On poursuit ainsi le processus, la particule sautant à chaque instant suivant, $n = 2, 3, 4...$ du sommet du graphe où elle se trouve vers un nouveau sommet (éventuellement le même) en suivant aléatoirement l'une des arrêtes suivant les probabilités indiquées.

On suppose que les sommets du graphe G sont numérotés de 1 à m. Le processus décrit ci-dessus définit une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, ..., m\}$ telle que pour n, on a $X_n = k$ si la particule se trouve sur le sommet k du graphe G après le $n$ème saut. $\mathcal{A}$ est appelée marche aléatoire sur le graphe G.

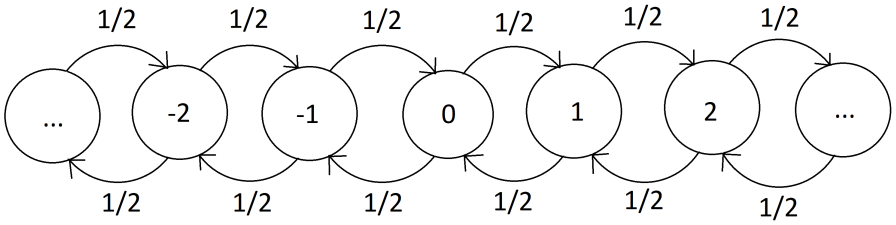
B. Marche aléatoire sur un graphe fini

On étudie dans cette question quelques propriétés de la marche aléatoire sur le graphe G_1 ci-dessous.



1. On considère la marche aléatoire sur G_1 partant de $X_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le vecteur colonne $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$
   En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n, établir une relation matricielle entre Y_{n+1} et Y_n de la forme $Y_{n+1} = AY_n$ où A est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $Y_n = A^n Y_0$.
3. Donner, pour $n \geq 1$, $P(X_n = 3)$ en justifiant votre réponse.
4. (a) Calculer A^2 puis $A^2(2A - I)$ (où I est la matrice identité d'ordre 3).
   En déduire la relation $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.
   (b) En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = u_n A^2 + v_n A$.
   (c) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.
   (d) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_n et v_n.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul la loi de X_n.

C. Marche Aléatoire sur $\mathbb{Z}$



On considère ici une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: la particule part du sommet 0 à l'instant $n = 0$. A l'instant 1, elle peut sauter en 1 ou en -1 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. A chaque instant suivant, si elle se trouve sur le sommet $i \in \mathbb{Z}$, elle saute de même soit sur $i+1$ soit sur $i-1$ avec la même probabilité $\frac{1}{2}$ (on dira respectivement qu'elle saute vers la droite ou vers la gauche). En conservant les notations de l'introduction, on obtient ainsi une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

1. On désire simuler une telle marche aléatoire.
   (a) Écrire une fonction `saut` en PYTHON qui renvoie 1 avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ et -1 avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.
   (b) Écrire une fonction `etapes` qui prend en argument un entier n et qui renvoie une liste de longueur n contenant un 1 quand la particule s'est déplacée à droite et un -1 quand la particule s'est déplacée à gauche (on pourra utiliser la fonction `saut`).
   (c) Que renvoie la fonction `ENIGME` suivante :

```
import random as rd

def ENIGME(n):
    S=0
    L=etapes(n)
    for i in range(n):
        if L[i]==1:
            S+=1
    return [S,n-S]
```

   (d) Écrire une fonction `marche` qui prend en argument un entier n et qui renvoie dans l'ordre la liste des entiers par lesquels la particule est passée au cours de la marche aléatoire.
   (e) Écrire une fonction `retour` qui prend en argument un entier n et qui renvoie 0 lorsque la particule ne repasse jamais par zéro et k si la particule retourne pour la première fois en 0 au k-ème saut.
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U_n = X_n - X_{n-1}$ la variable égale à la direction du $n$eme saut. Les variables $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées mutuellement indépendantes.

(a) Justifier que $\forall n \geq 1, X_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.

(b) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

3. On s'intéresse maintenant à la probabilité que la marche aléatoire passe par 0.

(a) Comparer, pour $n \in \mathbb{N}$ la parité de n et celle de X_n. Que vaut $P(X_{2k+1} = 0)$ pour $k \in \mathbb{N}$?

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $q_k = P(X_{2k} = 0) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$.

(c) Pour deux entier $k \in \mathbb{N}$ et $l \in [|-k, k|]$, déterminer plus généralement $P(X_{2k} = 2l)$.

4. On note T la variable aléatoire définie par :

$T = \min\{p \in \mathbb{N}^*, X_p = 0\}$ si l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}^*, X_p = 0\}$ n'est pas vide ; $T = 0$ sinon.

T est le temps du premier retour en 0 de la marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le but de cette question est d'établir la loi de T.
Pour un entier naturel $k \geq 1$, on considère les probabilités

$q_k = P(X_{2k} = 0)$ (cette valeur a été calculée précédemment). On convient que $q_0 = 1$.
$r_k = P(T = 2k)$

(a) Montrer que $r_1 = \frac{1}{2}$.

(b) A l'aide de la décomposition de l'événement $(X_{2n} = 0)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} r_k$$

(c) En déduire la valeur de r_2.

(d) Soit $n \geq 3$ un entier fixé. On suppose que pour tout $k \in \{1, ..., n-1\}, r_k = q_{k-1} - q_k$.
Établir que

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-k-1} q_k$$

(e) A l'aide de $\diamondsuit$, montrer que $r_n = q_{n-1} - q_n$. Conclure.

Annexe Quelques fonctions PYTHON pouvant être utilisées dans les programmes (liste non exhaustive) :

— Dans la bibliothèque `random` :
`random.random()` : simule une réalisation d'une variable $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$
`random.randint(a,b)` : simule une réalisation d'une variable $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{U}([|a, b|])$
`random.gauss(0,1)` : simule une réalisation d'une variable $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

— Dans la bibliothèque `matplotlib.pyplot` :
`matplotlib.pyplot.hist(X,n)` : trace un histogramme à n barres à partir des valeurs de la liste X.
`matplotlib.pyplot.show()` : affiche un graphique